Симетрійні властивості асиметричних моделей Нижника

О. О. Вінніченко[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

Система Нижника, побудована в [3], має вигляд

$$w_t = k_1 w_{xxx} + k_2 w_{yyy} + 3(v^1 w)_x + 3(v^2 w)_y, \quad v^1_y = k_1 w_x, \quad v^2_x = k_2 w_y, \tag{1}$$

де сталі параметри k_1 та k_2 задовольняють умову $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$. Систему (1) доцільно трактувати як параметризований клас систем, що складається з двох комножин відносно масштабних перетворень еквівалентності та перестановки $(x, v^1) \leftrightarrow (y, v^2)$. У симетричному випадку $k_1 k_2 \neq 0$ без обмеження загальності можна покласти $(k_1, k_2) = (1, 1)$, тоді як в асиметричному випадку, коли один із параметрів дорівнює нулю, — $(k_1, k_2) = (1, 0)$. Із системи (1) за допомогою введення потенціалів, граничних переходів, інтерпретації незалежних та/або залежних змінних як дійсних чи комплексних, а також диференціальних підстановок виводиться широкий спектр інтегровних моделей, які надалі називатимемо *моделями Нижника* [5]. Окрім зазначеного поділу на симетричні та асиметричні, їх також поділяють на стандартні з квадратичними нелінійностями та модифіковані з кубічними нелінійностями, а останні додатково поділяють на дефокусуючі та фокусуючі залежно від знаків нелінійностей. Вони можуть бути представлені як окремими рівняннями з частинними похідними, так і системами таких рівнянь. Залежно від природи змінних розглядають дійсні, комплексні, змішані та специфічні моделі, у яких деякі змінні є комплексно спряженими. Для дисперсійних моделей Нижника існують лінійні, а для бездисперсійних — нелінійні та неізоспектральні лінійні представлення Лакса. Відомі також узагальнення моделей Нижника з більшою кількістю незалежних або залежних змінних.

Кожна з моделей Нижника характеризується нетривіальними симетрійними властивостями, хоча їх систематичне дослідження перебуває лише на початковому етапі. Розглянемо лiївські симетрії деяких асиметричних моделей Нижника. Асиметричне (потенціальне) бездисперсійне рівняння Нижника, його нелінійне представлення Лакса, асиметричне (потенціальне) дисперсійне рівняння Нижника та його лінійне представлення Лакса відповідно мають вигляд:

$$u_{ty} = (u_x u_y)_x, \tag{2}$$

$$\vartheta_x \vartheta_y = -u_y, \quad \vartheta_t = \tfrac{1}{3}{\vartheta_x}^3 + u_{xx}\vartheta_x, \tag{3}$$

$$u_{ty} = u_{xxxy} + (u_x u_y)_x, \tag{4}$$

$$\psi_{xy} + \tfrac{1}{3} u_y \psi = 0, \quad \psi_t = \psi_{xxx} + u_x \psi_x. \tag{5}$$

Максимальна псевдоалгебра $\mathfrak{g}_2$ ліївської інваріантності асиметричного (потенціального) бездисперсійного рівняння Нижника є лінійною оболонкою векторних полів

$$D(\tau) = \tau\partial_t + \tfrac{1}{3}\tau_t x\partial_x - \tfrac{1}{3}(\tau_t u + \tfrac{1}{2}\tau_{tt}x^2)\partial_u, \quad S(\gamma) = \gamma\partial_y, \quad D^{\rm s} = x\partial_x + 2u\partial_u,$$
$$P(\chi) = \chi\partial_x - \chi_t x\partial_u, \quad Z(\sigma) = \sigma\partial_u$$

у просторі з координатами (t, x, y, u). Окрім цього, як і для симетричного випадку, максимальна псевдоалгебра контактної інваріантності цього рівняння співпадає з першим продовженням псевдоалгебри $\mathfrak{g}_2$.

Максимальна псевдоалгебра $\mathfrak{g}_3$ ліївської інваріантності нелінійного представлення Лакса (3) рівняння (2) є лінійною оболонкою векторних полів

$$\begin{gathered}\bar{D}(\tau) = \tau\partial_t + \tfrac{1}{3}\tau_t x\partial_x - \tfrac{1}{3}(\tau_t u + \tfrac{1}{2}\tau_{tt}x^2)\partial_u, \quad \bar{S}(\gamma) = \gamma\partial_y, \quad \bar{D}^{\rm s} = x\partial_x + 2u\partial_u + \tfrac{3}{2}\vartheta\partial_\vartheta,\\ \bar{P}(\chi) = \chi\partial_x - \chi_t x\partial_u, \quad \bar{Z}(\sigma) = \sigma\partial_u, \quad \bar{P}^\vartheta = \partial_\vartheta\end{gathered}$$

у просторі з координатами (t, x, y, u, ϑ). Псевдоалгебру $\mathfrak{g}_3$ можна отримати шляхом продовженням векторних полів з $\mathfrak{g}_2$ на додаткову залежну змінну ϑ та доповненням продовженої псевдоалгебри векторним полем $\bar{P}^\vartheta$. Іншими словами, максимальну псевдоалгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_3$ системи (3) індуковано максимальною псевдоалгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_2$ рівняння (2).

Максимальні псевдоалгебри ліївської інваріантності рівняння (4) та його представлення Лакса (5) є відповідно (нескінченновимірними) псевдопідалгебрами псевдоалгебр $\mathfrak{g}_2$ та $\mathfrak{g}_3$, які натягнуто на ті ж породжуючі векторні поля, окрім $D^{\rm s}$ та $\bar{D}^{\rm s}$ (для представлень Лакса додатково вважаємо $\psi = {\rm e}^\vartheta$):

$$\mathfrak{g}_4 := \langle D(\tau),\, S(\gamma),\, P(\chi),\, Z(\sigma)\rangle, \quad \mathfrak{g}_5 := \langle \bar{D}(\tau),\, \bar{S}(\gamma),\, \bar{P}(\chi),\, \bar{Z}(\sigma),\, \bar{D}^\psi\rangle.$$

Результати з [2,4] щодо ліївських, точкових і контактних симетрій симетричного (потенціального) бездисперсійного рівняння Нижника з певними модифікаціями можна поширити на інші симетричні моделі Нижника [5], але не на асиметричний випадок. Це пов'язано з істотною різницею як у структурі симетричних і асиметричних моделей Нижника, так і у структурі їхніх максимальних псевдоалгебр ліївської інваріантності та псевдогруп точкових симетрій. Тому асиметричні моделі потребують окремого систематичного вивчення в рамках симетрійного аналізу, яке вже розпочато в [5].

Авторка висловлює щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Поповичу Роману Омеляновичу та доктору фізико-математичних наук Бойку Вячеславу Миколайовичу за визначення напрямку дослідження та постановку задач. Дослідження підтримано грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, O.O.V.).

НФДУ

Олександра Вінніченко висловлює вдячність Національному фонду досліджень України завдяки грантовій підтримці якого реалізується проєкт 2025.07/0405 "Алебраїчні методи дослідження рівнянь математичної фізики". Зміст, висвітлений в цій роботі, може не співпадати з поглядами Національного фонду досліджень України і є виключною відповідальністю Інституту математики НАН України.

[1] Вінніченко О.О., Бойко В.М., Попович Р.О., Ліївські та точкові симетрії моделей Нижника, у процесі підготовки.

[2] Boyko V. M., Popovych R. O. and Vinnichenko O. O., Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **132** (2024), 107915, 19 pp., arXiv:2211.09759.

[3] Nizhnik L. P., Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method, *Soviet Phys. Dokl.* **25** (1980), 706–708.

[4] Vinnichenko O. O., Boyko V. M. and Popovych R. O., Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation, *Anal. Math. Phys.* **14** (2024), 82, 56 pp., arXiv:2308.03744.

[5] Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O., Point-symmetry pseudogroup and Lie reductions of Boiti–Leon–Manna–Pempinelli equation, in preparation.