

ФУНКЦІЇ МОРСА ТА ФУНКЦІЇ КОРОЗМІРНОСТІ 1 НА ПРОЄКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ

О. О. Пришляк¹, С. О. Стась²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

²Інститут математики НАН України, Київ, Україна

prishlyak@knu.ua, stasserhii380@imath.kiev.ua

Для опису топологічних властивостей функцій на двовимірних многовидах використовується інваріант, що називається графом Ріба. У випадку простих функцій Морса на замкнутих орієнтованих двовимірних многовидах, це повний топологічний інваріант для пошарової еквівалентності. У разі неорієнтованого двовимірного многовиду, а також многовидів з межею потрібна додаткова інформація для побудови повного топологічного інваріанта. Якщо лінійний порядок заданий на множині вершин, то він стає повним топологічним інваріантом відносно топологічної еквівалентності.

У роботі отримана топологічна класифікація функцій Морса та функцій корозмірності 1 на проєктивній площині. У цих випадках граф Ріба є орієтованим кореневим деревом. Отримано аналітичний вираз для кількості орієтованих графів Ріба з коренем. Для функцій корозмірності 1 для фіксованої кількості критичних точок побудовані всі можливі графи Ріба.

Нехай M – гладкий замкнений двовимірний многовид, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція.

Означення 1. Невиродженою критичною точкою називається критична точка $x \in M$, якщо в деяких локальних координатах x_1, x_2 матриця

$$H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

є невірною.

Означення 2. Функція Морса – це гладка функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, у якій всі критичні точки є невірними.

Означення 3. Функція Морса називається *простою*, якщо всі її критичні точки лежать на різних рівнях, тобто $f(p) \neq f(q)$, якщо $p \neq q$, в іншому випадку – *складною*.

Означення 4. Компоненти лінії рівня $f^{-1}(y)$ функції Морса називається *шаром*.

Означення 5. Дві функції Морса називаються *пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм поверхні на себе, який переводить шари однієї функції в шари іншої, а також локальні мінімуми на локальні мінімуми.

Означення 6. Фактор-простір M/\sim з орієтацією ребер відповідно до напрямку зростання функції називається *графом Ріба*, де $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – функція Морса, $x_1 \sim x_2$, якщо x_1 і x_2 належать одному шару. Графи Ріба розглядаються з урахуванням ізоморфізму орієтованих графів.

Теорема 1. *Граф Ріба простої функції Морса на проєктивній площині має такі властивості:*

1. *граф є деревом;*

2. граф має одну вершину валентності 2, інші вершини мають ступені 1 або 3;

3. лише вершини ступеня 1 є джерелами та стоками.

Теорема 2. Дві прості функції Морса на $\mathbb{R}P^2$ є пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх графи Ріба ізоморфні.

Теорема 3. Число K_k орієнтованих графів Ріба з коренем та k сідловими точками можна обчислити за допомогою наступних рекурсивних формул: для парного $k = 2n$

$$K_{2n} = 3(K_0K_{2n-1} + K_1K_{2n-2} + \cdots + K_{n-1}K_n);$$

для непарного $k = 2n + 1$

$$K_{2n+1} = 3(K_0K_{2n} + K_1K_{2n-1} + \cdots + K_{n-1}K_n) + \frac{3K_n^2 + K_n}{2}.$$

Теорема 4. Кількість N_k топологічно нерівносильних простих функцій Морса на $\mathbb{R}P^2$ можна обчислити за допомогою наступної формули:

$$N_k = K_0K_{k-1} + K_1K_{k-2} + \cdots + K_{k-1}K_0$$

[1] Пришляк О. О. Стась С. О, Функції Морса та функції корозмірності 1 на проективній площині, *Дослідження в математичці і механіці* **28** (2023), 103–119.