Про степеневі та логарифмічні оцінки спотворення відстані

Р. Р. Салімов[1], М. В. Стефанчук[1]
[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна
ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна і відкрита підмножина $\mathbb{C}$. Відображення $f : D \to \mathbb{C}$ називається *відображенням зі скінченним спотворенням,* якщо $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ (див. означення *простору Соболєва* $W^{1,1}_{\rm loc}$ на с. 8 в [1]) і

$$\|f'(z)\|^2 \leqslant K(z) \cdot |J_f(z)|,$$

де $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$, $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ — якобіан відображення f та $K(z)$ — деяка майже скрізь скінченна функція. Тут і надалі $f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$, $f_z = (f_x - if_y)/2$, $z = x+iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x та y, відповідно.

Нехай $f\colon D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням, $z_0 \in D$ та $p > 1$. Покладемо

$$D_{p,f}(z, z_0) = \frac{|f_\theta(z_0 + re^{i\theta})|^p}{r^p |J_f(z_0 + re^{i\theta})|},$$

де f_θ — частинна похідна f по θ у полярній системі координат (r, θ), якщо $z = z_0 + re^{i\theta} \in D$ є точкою регулярності відображення f, та $D_{p,f}(z, z_0) = 0$ в інших випадках. Величина $D_{p,f}(z, z_0)$ називається *p-кутовою дилатацією* відображення f у точці z відносно точки z_0, $z \neq z_0$.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{C}$ — вимірна множина та $1 \leqslant p < \infty$. Тоді через $L_p(\Omega)$ позначають *простір вимірних за Лебегом функцій* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, що $\int\limits_{\Omega} |u(z)|^p \, dxdy < \infty$. Норма у просторі $L_p(\Omega)$ визначається за формулою $\|u\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |u(z)|^p \, dxdy\right)^{1/p}$.

Для точки $z_0 \in \mathbb{C}$ покладемо

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}, \quad B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $z_0 \in D$. Тоді будемо позначати $\operatorname{dist}(z_0, \partial D) = \inf\limits_{z \in \partial D} |z - z_0|$.

Нижче наведені степеневі оцінки спотворення відстані при гомеоморфізмах зі скінченним спотворенням, див. теорему 6.1 та наслідок 6.1 в [2].

Теорема 1. *Припустимо, що $f : D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфізм зі скінченним спотворенням. Якщо для деякої точки $z_0 \in D$ та чисел $p > 2$, $\lambda > 1$, $\sigma > 0$ і $C_{z_0} > 0$ виконується умова*

$$\varepsilon^\sigma \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| D_{p,f} \|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r)} \geqslant C_{z_0}$$

для будь-якого $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 \in \left(0, \frac{\operatorname{dist}(z_0, \partial D)}{\lambda^2}\right)$, *де*

$$\| D_{p,f} \|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) = \left(\int\limits_{S(z_0,r)} [D_{p,f}(z, z_0)]^{\frac{1}{p-1}} \, |dz| \right)^{p-1},$$

то

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0 \, C_{z_0}^{-\frac{1}{p-2}} \, |z - z_0|^{\frac{\sigma}{p-2}}$$

для всіх $z \in B(z_0, \delta_0)$, *де* ν_0 — *додатна стала, що залежить тільки від* p, λ *і* σ.

Наслідок 1. *Припустимо, що* $f : D \to \mathbb{C}$ — *гомеоморфізм зі скінченним спотворенням,* z_0 — *деяка точка області* D, $p > 2$ *та* $\alpha > \frac{2}{p-2}$. *Якщо* $D_{p,f}(z, z_0) \in L_\alpha(B(z_0, \delta_0))$, $\delta_0 \in \left(0, \frac{\operatorname{dist}(z_0, \partial D)}{4}\right)$, *то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0 \|D_{p,f}(z, z_0)\|_\alpha^{\frac{1}{p-2}} |z - z_0|^{1 - \frac{2}{\alpha(p-2)}}$$

для всіх $z \in B(z_0, \delta_0)$, *де* $\|D_{p,f}(z, z_0)\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(z_0,\delta_0)} D_{p,f}^\alpha(z, z_0) \, dxdy \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *є нормою у просторі* $L_\alpha(B(z_0, \delta_0))$ *та* ν_0 — *додатна стала, яка залежить тільки від* p *і* α.

Нижче наведено логарифмічну оцінку спотворення відстані при гомеоморфізмах зі скінченним спотворенням, див. теорему 7.1 у [2].

Теорема 2. *Нехай* $p > 2$, $z_0 \in D$. *Припустимо, що* $f : D \to \mathbb{C}$ — *гомеоморфізм зі скінченним спотворенням,* $\|D_{p,f}\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) \neq \infty$ *для майже всіх* $r \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial D))$ *та існують числа* $C_{z_0} > 0$, $\kappa \in [0, \frac{p}{p-1})$ *такі, що для будь-яких* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{D_{p,f}^{\frac{1}{p-1}}(z, z_0) \, dxdy}{|z - z_0|^{\frac{p}{p-1}}} \leqslant C_{z_0} \ln^\kappa \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right).$$

Тоді для всіх $z \in B(z_0, \delta_0)$, $\delta_0 \in \left(0, \min\{1, \operatorname{dist}^4(z_0, \partial D)\}\right)$, *виконується нерівність*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0 \, C_{z_0}^{\frac{p-1}{p-2}} \, \ln^{-\frac{p-\kappa(p-1)}{p-2}} \frac{1}{|z - z_0|},$$

де ν_0 — *додатна стала, яка залежить тільки від* p *і* κ.

Марія Стефанчук була підтримана бюджетною програмою “Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

[1] Maz’ya V., Sobolev Classes, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[2] Салімов Р. Р., Стефанчук М. В., Про локальні властивості відображень зі скінченним спотворенням, *Український математичний вісник* (прийнято до друку).