Функція канторівського типу, означена в термінах ланцюгового A_s-зображення чисел

С. П. Ратушняк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

ratush404@gmail.com

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{e_{0s}, e_{1s}, ..., e_{[s-1]s}\}$ – алфавіт, де $(e_{0s}, e_{1s}, ..., e_{[s-1]s})$ – набір дійсних чисел, таких що $0 < e_{0s} < e_{1s} < ... < e_{[s-1]s}$, $L_s \equiv A_s \times A_s \times \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту A_s.

Розглядається множина значень усіх нескінченних ланцюгових дробів вигляду

$$1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n + ... \equiv [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]^{A_s}, (a_n) \in L_s.$$

Ланцюгові дроби такого вигляду називаються A_s-*дробами*. Очевидно, що

$$\min_{a_n \in A_s} [0; a_1, ..., a_n, ...]^{A_s} = [0; (e_{[s-1]s}, e_{0s})]^{A_s} \equiv d_{0s}, \max_{a_n \in A_s} [0; a_1, ..., a_n, ...]^{A_s} = [0; (e_{0s})]^{A_s} \equiv d_{1s}.$$

Теорема 1. [4] *Система зображення (кодування) чисел відрізка* $[d_{0s}; d_{1s}]$ *ланцюговими* A_s*-дробами має нульову надлишковість (лише злічення множина чисел відрізка* $[d_{0s}; d_{1s}]$ *має лише два зображення) тоді і лише тоді, коли елементи алфавіту* A_s *утворюють арифметичну прогресію з різницею* $d_s \equiv d_{1s} - d_{0s}$.

Зазначимо, що у випадку, коли $s = 2$ (див. [1, 2]), то необхідною і достатньою умовою нульової надлишковості системи кодування є умова $e_{02} \cdot e_{12} = \frac{1}{2}$; якщо $s = 3$ (див. [3]), то необхідною і достатньою умовою нульової надлишковості системи кодування є умова $2e_{13} = e_{03} + e_{23}$.

Якщо виконуються умови теореми 1, то числа, які мають два зображення (A_s-*бінарні*) вичерпуються числами вигляду

$$[0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, e_{is}, (e_{[s-1]s}, e_{0s})]^{A_s} = [0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, e_{[i-1]s}, (e_{0s}, e_{[s-1]s})]^{A_s}, \quad i \in \{1, 2, ..., s-1\}.$$

Решта чисел відрізка $[d_{0s}; d_{1s}]$ мають єдине зображення і називаються A_s-*унарними*.

Зображення числа x ланцюговим A_s-дробом $[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]^{A_s}$ можна перекодувати засобами класичного s-кового алфавіту $\{0, 1, 2, ..., s-1\}$:

$$[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]^{A_s} = x = \Delta^{A_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \text{ де } e_{\alpha_n s} = a_n \ \forall n \in N.$$

Основним об'єктом розгляду є функція f, означена рівністю

$$f(x = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2...\beta_n...}, \quad \alpha_n \in \{0, 1, 2\}, \beta_n \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

$$\beta_1 = \left[\frac{\alpha_1 + 1}{2}\right], \ \beta_n = \begin{cases} \left[\frac{\alpha_n+1}{2}\right], & \text{якщо } \alpha_i \neq 1 \ \forall i < n, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \neq 1 \ \forall i < n-1, \alpha_{n-1} = 1, n > 1, \\ 1 - \beta_{n-1}, & \text{в решті випадків,} \end{cases}$$

де $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}$.

Оскільки $f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1...\alpha_{n-1}\alpha_n(20)}) = f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1...\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](02)})$, то означення функція f рівністю (1) є коректним.

Теорема 2. *Функція f є неспадною. Множиною несталості функції f є досконала ніде не щільна множина канторівського типу*

$$C = C[A_3; \{0,2\}] = \{x : \; x = \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \; \alpha_n \in \{0,2\}, n \in N\}.$$

Наслідок 1. *Міра Лебега об'єднання проміжків сталості функції f дорівнює d_3.*

Теорема 3. *Функція f є неперервною функцією канторівського типу, тобто неперервною відмінною від константи функцією, сумарна довжина усіх інтервалів сталості якої дорівнює довжині області визначення.*

Наслідок 2. *Функція f є сингулярною функцією, тобто неперервною функцією, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега.*

Зауваження 1. Функція f є аналогом сингулярної функції Кантора.

Зазначимо, що функції канторівського типу є актуальним об'єктом дослідження в першу чергу через їхній зв'язок з розподілами випадкових величин, означених в деякій системі зображення чисел, оскільки усі зростаючі функції канторівського типу потенційно можуть бути функціями розподілу випадкових величин, причому таких, розподіли яких є сумішшю дискретної та сингулярної компоненти.

Зауважимо, що дана сингулярна функція канторівського типу має принципові відмінності від тих функцій, що раніше фігурували у дослідженнях, оскільки зображення значення функції є ланцюговим.

У доповіді планується висвітлення тополого-метричних, інтегро-диференціальних, а також структурних (зокрема автомодельних) властивостей функції f.

Робота підтримана грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, S.R.).

[1] Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування, Наукова думка, Київ, 2022, 316 с.

[2] Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Pratsiovytyi M. V., A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry, *Ukrainian Mathematical Journal* **61** (2009), no. 4, 541–555.

[3] Працьовитий М. В., Чуйков А. С., Кюрчев Д. В., Ланцюгові A_3-дроби: основи метричної теорії, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **14** (2017), №4, 97–110.

[4] Ratushniak S., Pratsiovytyi M., Infinite continued fractions with a bounded set of elements and their applications, *Inspirations in Real Analysis II* (Bedlewo, Poland, April 14–19, 2024): Book of Abstracts., Lodz: Lodz Univ. Technol. Press, 2024.