

## СТРУКТУРА ГРАДІЄНТНИХ ПОТОКІВ З ПОДВІЙНИМ СІДЛОМ НА СФЕРІ З ДІРКАМИ

О. О. Пришляк<sup>1</sup>, І. А. Овцінов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ММФ КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

<sup>2</sup>ММФ КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

*prishlyak@knu.ua, iliaovtsynov@knu.ua*

Існує біфуркація гладких векторних полів з появою подвійного сідла (*BDS*-біфуркація) на площині:

$$V(x, y, a) = \{3x^2 - 3y^2 + a, -6xy\}, y \geq 0.$$

На компактних поверхнях така біфуркація може відбутися тільки на її межі. Зокрема, до та після моменту біфуркації векторне поле є полем Морса. Потoki, породжені векторними полями, що з'являються в моменти подібних біфуркацій, називаються *BDS*-потокami.

В нашій роботі досліджено задачу побудови повного топологічного інваріанта для потоків Морса перед моментом біфуркації, а саме *розрізняльнього графа*, що є узагальненням представленої в нашій попередній роботі [1] *хордової діаграми*. Будується цей граф наступним чином: береться відповідна сфера зі скінченною кількістю дірок, на якій зображено потік Морса, на сфері позначаються стійкі многовиди всіх сідлових точок досліджуваного потоку, а далі вирізаються досить малі околи для кожного джерела потоку. Утворюється специфічний топологічний граф, у якому залишається розфарбувати ребра та вершини:

- 1) межі околів джерел позначені пунктирною лінією, стійкі многовиди сідел з внутрішності поверхні зафарбовані в тонкий чорний колір, а межа поверхні позначена напівжирним чорним кольором;
- 2) стоки потоку зафарбовані в білий колір, а всі інші вершини графа зафарбовані в чорний колір.

**Теорема 1.** *BDS*-потoki є топологічно еквівалентними тоді й лише тоді, коли відповідні розрізняльні графи є ізоморфними. [2]

З використанням одержаних відомостей було побудовано код — спеціальну послідовність символів, яка відповідає конкретному розрізняльному графу і лише йому, а відтак і самому потоку з подвійним сідлом. Показано основні властивості кодів для даних потоків.

Також пораховано кількість *BDS*-потоків на сферах з однією, двома та трьома дірками за умови, що кількість особливих точок потоку не перевищує 6. Наприклад, існує 3 *BDS*<sub>+</sub>-потoki з 5 особливими точками, і 9 *BDS*-потоків з 6 особливими точками на двовимірному диску.

- [1] Prishlyak A., Ovtsynov I., Optimal codimension one gradient flows on closed surfaces, *Proceedings of the International Geometry Center*, **18** (2025), 1, 69–101, arXiv:2408.10687.
- [2] Prishlyak A., Ovtsynov I., The structure of Morse and codimension one gradient flows on the sphere with holes, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics* **97** (2026), 137–158, arXiv:2601.06926.