Кільця 2-евклідового рангу 1

А. Є. Плаксін[1], О. М. Романів[1], А. В. Саган[1]
[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
andrii.plaksin@lnu.edu.ua, oleh.romaniv@lnu.edu.ua, andriisahan@lnu.edu.ua

Нехай R — комутативне асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею.

Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю; 3) матриці, отримані з одиничної перестановкою рядків чи стовпчиків.

Групу всіх елементарних матриць порядку n з елементами з кільця R позначатимемо $GE_n(R)$.

Кільце називається *кільцем Безу* [1], якщо довільний скінченнопороджений ідеал цього кільця є головним.

Кільце R називається *кільцем Ерміта* [2], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $d \in R$ і така оборотна матриця Q другого порядку, що $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}$.

Кільце R називається *елементарно головним* [3], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $q \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} q & 0 \end{pmatrix}$.

Норма над кільцем R визначається як функція $\varphi \colon R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє умовам $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) > 0$ для $a \in R \backslash \{0\}$, $\varphi(ab) > \varphi(a)$ для довільних $a, b \in R$ таких, що $ab \neq 0$.

Елемент a кільця R називається 2-*евклідовим*, якщо для довільного ненульового елемента b цього кільця існує норма φ та послідовність рівностей

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \tag{1}$$

така, що $\varphi(r_2) < \varphi(b)$.

Кільце R називається *кільцем* 2*-евклідового рангу* 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, де $aR + bR = R$, існує такий елемент $y \in R$, що $a + by$ — 2-евклідовий елемент.

Теорема 1. *Якщо R — кільце 2-евклідового рангу 1, то для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існують елемент $u \in R$ і матриці $P_1, \ldots, P_n \in GE_2(R)$, що*

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot P_1 \cdots P_n = \begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Комутативна область Безу 2-евклідового рангу 1 є елементарно головною.*

Теорема 3. *Комутативна область Безу 2-евклідового рангу 1 є кільцем Ерміта.*

Теорема 4. *Довільна оборотна матриця над комутативною областю 2-евклідового рангу 1 розкладається у скінченний добуток елементарних матриць.*

[1] Henriksen M., Some remarks about elementary divisor rings, *Michigan Math. J.* **156** (1955), 150–163.

[2] Kaplansky I., Elementary divisors and modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **66** (1949), no. 2, 464–491.

[3] Bougaut B., Anneaux Quasi-Euclidiens, *These de docteur troisieme* (1976), 67 pp.