Комбінований метод Роте-РБФ для розв'язування задач з параболічним інтегро-диференціальним рівнянням зі слабосингулярним ядром

О. Б. Паляниця[1]

[1]Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна

oksana.palianytsia@lnu.edu.ua

В обмеженій однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ з межею ∂D розглядається задача для параболічного інтегро-диференціального рівняння типу Вольтерра

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mathcal{L}u(x,t) - \lambda Au(x,t) = f(x,t), \quad x \in D,\ t \in (0,T] \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = w(x), \quad x \in D \tag{2}$$

та крайовою умовою Діріхле

$$u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial D,\ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Тут $\mathcal{L}$ — еліптичний диференціальний оператор, $T, \lambda > 0$ — задані константи. Інтегральний оператор має вигляд

$$Au(x,t) = \int_0^t \frac{K(t,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} u(x,\tau)\, d\tau,$$

де $\alpha \in [0,1)$ — параметр сингулярності. Припускається, що функції f, w, g та ядро K є достатньо гладкими, що забезпечує коректність задачі [2, с. 514].

Для чисельного розв'язування застосовується комбінація методу Роте за часом та радіальних базисних функцій (РБФ) за просторовими змінними. Такий підхід застосовувався до чисельного розв'язування задачі для інтегро-диференціального рівняння з інтегральним оператором Фредгольма у [1].

На рівномірній сітці $t_i = i\tau$ $(i = 0, \ldots, N_t)$ з кроком $\tau = T/N_t$ часова похідна апроксимується різницевою схемою першого порядку, а інтегральний оператор наближається квадратурною сумою

$$A_h u_i = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik} u_k,$$

де $u_k \approx u(\cdot, t_k)$ — наближені значення розв'язку на попередніх часових шарах, а β_{ik} — вагові коефіцієнти, що обчислюються шляхом точного інтегрування сингулярної частини ядра

$$\beta_{ik} = K(t_i, t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{(t_i - s)^\alpha}\, ds.$$

Це зводить еволюційну задачу (1)-(3) до рекурентної послідовності стаціонарних еліптичних задач

$$(-\mathcal{L} - \gamma_{ii} I) u_i = f_i(x) + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ik} u_k \text{ в } D, \quad u_i = g_i \text{ на } \partial D, \tag{4}$$

де $f_i = f(\cdot, t_i), \quad g_i = g(\cdot, t_i), \quad \gamma_{ik} = \begin{cases} \lambda\beta_{ik}, & 1 \le k \le i-2, \\ \lambda\beta_{ik} + \frac{1}{\tau}, & k = i-1, \\ \lambda\beta_{ik} - \frac{1}{\tau}, & k = i. \end{cases}$

Просторова апроксимація стаціонарних задач (4) здійснюється методом РБФ у хмарі точок $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \bar{D}$. Наближений розв'язок будується у вигляді лінійної комбінації РБФ φ та поліноміального базису $p \in \Pi^d_{M-1}$ [3]

$$u_i(x) \approx \tilde{u}_i(x) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \varphi(|x - x_j|) + \sum_{k=1}^{M} d_{ik} p_k(x), \quad \sum_{j=1}^{N} c_{ij} p_k(x_j) = 0. \tag{5}$$

Друге рівняння в (5) є додатковим обмеженням на вектор коефіцієнтів c_{ij}, що гарантує однозначну визначеність наближення [4, с. 97]. Застосування методу колокації у вузлах сітки (де перші N_{bnd} точок лежать на межі ∂D, а решта N_{int} точок є внутрішніми, $N = N_{bnd} + N_{int}$) приводить до послідовності СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів c_{ij} та d_{ik} при $i = 1, \ldots, N_t$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\varphi(\|x_\theta - x_j\|) + \sum_{k=1}^{M} d_{ik}p_k(x_\theta) = g_i(x_\theta), & \theta = 1, \ldots, N_{bnd}, \\ -\sum_{j=1}^{N} c_{ij}[\mathcal{L}\varphi(\|x_\theta - x_j\|) + \gamma_{ii}\varphi(\|x_\theta - x_j\|)] & \\ \quad -\sum_{k=1}^{M} d_{ik}[\mathcal{L}p_k(x_\theta) + \gamma_{ii}p_k(x_\theta)] = f_i(x_\theta) + \sum_{m=1}^{i-1} \gamma_{im}\tilde{u}_m(x_\theta), & \theta = N_{bnd}+1, \ldots, N, \\ \sum_{j=1}^{N_{bnd}} c_{ij}p_k(x_j) - \sum_{j=N_{bnd}+1}^{N} c_{ij}[\mathcal{L}p_k(x_j) + \gamma_{ii}p_k(x_j)] = 0, & k = 1, \ldots, M. \end{cases} \tag{6}$$

Теоретичний аналіз стійкості та збіжності повністю дискретної схеми проведено за допомогою методу енергетичних нерівностей та дискретної леми Грьонвалля. Доведено, що для різниці між точним розв'язком u та його повністю дискретним наближенням $\tilde{u}_i$ при використанні гладких РБФ (мультиквадричних функцій або функцій Гаусса) виконується така апріорна оцінка в нормі простору $L^2(D)$

$$\max_{1\le i\le N_t} \|u(\cdot, t_i) - \tilde{u}_i\|_{L^2(D)} \le \mathcal{O}(\tau) + C_1 e^{-c/h} \max_{1\le i\le N_t} \|u_i\|_{\mathcal{N}_\Phi} + C_2 \mathrm{cond}(\mathbf{A})\delta_{\mathrm{mach}}, \tag{7}$$

де τ — часовий крок, h — щільність просторових вузлів, C_1, C_2, c — додатні константи, що не залежать від параметрів дискретизації h та τ, $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ — число обумовленості матриці колокації, а δ_{mach} — машинна точність.

Перший доданок в (7) демонструє збіжність часової схеми Роте, другий — експоненціальну збіжність просторової апроксимації, яка залежить від норми напівдискретного розв'язку в нативному просторі $\mathcal{N}_\Phi$. Проте експоненціальне зменшення теоретичної похибки при подрібненні сітки ($h \to 0$) призводить до стрімкого погіршення властивостей матриці $\mathbf{A}$ зі збільшенням величини третього доданка — похибки заокруглень.

Чисельні експерименти підтверджують отримані теоретичні оцінки та демонструють застосовність запропонованого алгоритму.

[1] Borachok I., Chapko R., Palianytsia O., On the numerical solution of a parabolic Fredholm integro-differential equation by the RBF method, *Results in Applied Mathematics*, **26** (2025), 1–11.

[2] Dautray R., Lions J.-L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5: Evolution Problems I, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 711 pp.

[3] Kansa E. J., Multiquadrics–A scattered data approximation scheme..., *Computers Math. Applic.* **19** (1990), 8/9, 147–161.

[4] Wendland H., Scattered Data Approximation, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.