# Клас неперервних функцій необмеженої варіації, означених в термінах ланцюгового зображення чисел

**О. О. Нікорак**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
*nikorak@imath.kiev.ua*

Нехай $2 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{e_{0s}, e_{1s}, \ldots, e_{[s-1]s}\}$ — алфавіт (впорядкований набір додатних дійсних чисел: $0 < e_{0s} < e_{1s} < \ldots < e_{[s-1]s}$). *Нескінченним ланцюговим $A_s$-дробом ($A_s$-дробом)* називається вираз виду

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \equiv [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]^{A_s}, a_i \in A_s. \tag{1}$$

Оскільки $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \infty$ для будь-якої послідовності $(a_n)$, то згідно з теоремою Зейделя [6] кожен $A_s$-дріб є збіжним, тобто існує скінченна границя його підхідних дробів.

Для множини значень $A_s$-дробів $E = \{x : x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]^{A_s}, a_n \in A_s\}$ має місце

$$\min_{a_n \in A_s} \{E\} = [0; (e_{[s-1]s}, e_{0s})]^{A_s} \equiv d_{0s}, \quad \max_{a_n \in A_s} \{E\} = [0; (e_{0s}, e_{[s-1]s})]^{A_s} \equiv d_{1s}.$$

Далі розглядається лише випадок, коли числа $e_{is}$ утворюють арифметичну прогресію з різницею $d_s \equiv d_{1s} - d_{0s}$, тобто

$$e_{is} = e_{[i-1]s} + d_s, \ i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}. \tag{2}$$

**Теорема 1.** [4] *Для довільного $x \in [d_{0s}; d_{1s}]$ існує послідовність $(a_n)$, де $a_n \in A_s$, така що*

$$x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]^{A_s}.$$

Запис $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]^{A_s}$ називається *ланцюговим $A_s$-зображенням* числа $x$.

Ввівши перекодування за правилом: $a_n = e_{\alpha_n s}$, де $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, ми отримаємо ланцюгове $A_s$-зображення $\Delta^{A_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ засобами класичного алфавіту:

$$[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]^{A_s} = x = \Delta^{A_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \quad e_{\alpha_n s} = a_n \ \forall n \in N.$$

Ланцюгове $A_s$-зображення чисел – зображення, що ґрунтується на розкладах чисел в нескінченні ланцюгові дроби за елементами $s$-символьної множини, тобто $A_s$-дроби, є одним з прикладів несамоподібної системи зображення чисел. Випадок, коли $s = 2$, заслуговує окремої увагу, зокрема у зв'язку з мінімальністю алфавіту. Для нього було описано тополого-метричну і ймовірнісну теорію зображення [2], введено в розгляд клас неперервних сингулярних функцій [3, 5], означених в термінах $A_2$-зображення чисел.

Нехай $k$ – фіксоване натуральне число, $A_{3k+2}$, $A_{k+2}$ – задані алфавіти, для елементів яких виконується умова (2), $\hat{A}_{3k+2} \equiv \{0, 1, \ldots, 3k+1\}$, $\hat{A}_{k+2} \equiv \{0, 1, \ldots, k+1\}$.

*Основним об'єктом* розгляду є функція $f$, означена рівністю:

$$f(x = \Delta^{A_{3k+2}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{A_{k+2}}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \quad \text{де } \beta_n(\alpha_n, c_n) = \left| c_n - \left[\frac{\alpha_n + 2}{3}\right] \right|, \tag{3}$$

$$\alpha_n \in \hat{A}_{3k+2}, \ \beta_n \in \hat{A}_{k+1}, \ c_1 = 0, c_{n+1} = \begin{cases} c_n, & \text{якщо } \alpha_n \neq 2 + 3i, \\ k + 1 - c_n, & \text{якщо } \alpha_n = 2 + 3i, \end{cases}, \ n \in N, i = \overline{0, k-1}.$$

**Теорема 2.** *Функція $f$ є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.*

**Теорема 3.** *Функція $f$ має як скінченні, так і континуальні рівні, причому, якщо у зображенні $y_0$ нескінченна кількість цифр відмінних від 0 і $k+1$, то множина даного рівня є континуальною. Множина $f^{-1}(\Delta^{\hat{A}_{k+1}}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(i)})$, де $i \in \hat{A}_{k+1} \setminus \{0, k+1\}$ для довільного $n \in N$, є ніде не щільною досконалою множиною нульової міри Лебега.*

Зазначимо, що коли $k = 1$, то функція $f$ є аналогом неперервної ніде не диференціовної функції Серпінського, що розглядалась в роботі [1]. Разом з цим, для фіксованого $k \neq 1$ функція $f$ не є аналогом узагальнення недиференційовної функції Серпінського, введеного в роботі Працьовитого М.В. та Василенко Н.А.

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних, структурних та варіаційних властивостей функції $f$.

[1] Працьовитий М. В., Василенко Н. А., Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського, *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, Серія 1. Фіз.-мат. науки* **11** (2010), 170–181.

[2] Працьовитий М. В., Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування, *Київ: Наукова думка* (2022), 316 с.

[3] Нікорак О. О., Ратушняк С. П., Неперервний проєктор двійкового зображення чисел в ланцюгове $A_2$-зображення, *Буковинський математичний журнал* **13** (2025).

[4] Ratushniak S., Pratsiovytyi M, Infinite continued fractions with a bounded set of elements and their applications, *Inspirations in Real Analysis II (Bedlewo, Poland, April 14–19, 2024): Book of Abstracts* Lodz: Lodz Univ. Technol. Press, (2024).

[5] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P., Continued $A_2$-fractions and singular functions, *Matematychni Studii* **58** (2022), no. 1.

[6] Seidel L., Untersuchungen *ü*ber die Konvergenz and Divergenz der Kettenbrüche. *München: Habilschrift* (1846).