Розвинення функцій $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ у ланцюговий дріб за допомогою розв'язків задачі Тіле–Ерміта

Ю. М. Мисло

Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський національний університет",
Ужгород, Україна

julia.pah@gmail.com

Нехай функція f визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ і $z_0 \in \mathcal{Z}$. Потрібно знайти коефіцієнти ланцюгового дробу вигляду Тіле

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^{n} \frac{z - z_0}{b_k}, \quad b_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ k = \overline{0, n}, \tag{1}$$

так, щоб в точці $z = z_0$ виконувалися умови

$$D_n(z) = f(z_0),\ D_n^{(m)}(z_0) = \left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right)^{(m)} |_{z=z_0} = f^{(m)}(z_0),\ m = \overline{0, n}. \tag{2}$$

Задачу (1)–(2) називаємо задачею Тіле–Ерміта.

Показано, що для відшукання коефіцієнтів ланцюгового дробу (1) функцій $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ можна застосувати формули:

$$\begin{gathered} b_0 = w_0, \quad b_1 = \frac{1}{w_1}, \quad b_2 = \frac{-1}{b_1^2 \frac{w_2}{2!}}, \quad b_k = 1 \Big/ \prod_{j=1}^{k-1} b_j^2 \Big(\frac{(-1)^{k-1} w_k}{k!} - \\ - \Big(\frac{1}{b_1^3 b_2^2} \sum_{i_3=1}^{2} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=1}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3} \sum_{i_3=1}^{2} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=1}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \\ \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \frac{1}{b_4 \prod\limits_{j=1}^{3} b_j^2} \sum_{i_4=1}^{3} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \sum_{i_5=1}^{i_4+1} \frac{1}{b_{i_5} b_{i_5+1}} \cdots \\ \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \cdots + \frac{1}{b_{k-1} \prod\limits_{j=1}^{k-2} b_j^2} \sum_{i_{k-1}=1}^{k-2} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} \Big) \Big), \quad k = \overline{4, n}. \end{gathered} \tag{3}$$

Ненульові коефіцієнти дробу (1) обчислюються безпосередньо через значення функції f у вузлі $z = z_0$ та значення її похідних n-го порядку.

Формули (3) дозволяють знайти коефіцієнти ланцюгових дробів тільки за значеннями функцій та їх похідних без обчислення обернених похідних Тіле, визначників Ганкеля, встановлення взаємозв'язку з гіпергеометричними функціями чи відшукання параметрів диференціального рівняння Рікатті.

[1] Pahirya M., Myslo Yu., A certain method of construction of Thiele–Hermite continued fraction at a point, *Proceedings of the International Geometry Center* **16** (2023), no. 3–4, 244–261.

[2] Myslo Yu., The corresponding quasi-inverse chain fraction of Thiele type, *Proceedings of the International Geometry Center* **17** (2024), no. 2, 171–189.