Принцип фрактальної квазіеквівалентності для класичних та модифікованих розкладів Енгеля

М. П. Мороз[1,2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

[2]Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

moroznik22@gmail.com

Класичним розкладом Енгеля числа $x \in (0,1]$ називається його представлення у вигляді ряду

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1 p_2} + \cdots + \frac{1}{p_1 \cdots p_n} + \cdots , \tag{1}$$

де $p_n \in \mathbb{N}$ та $p_{n+1} \geq p_n \geq 2$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Ряд (1) та його суму x коротко позначають $\Delta^E_{p_1 p_2 \ldots}$. Число $p_n = p_n(x)$ називають n-ною E-цифрою числа x.

Модифікованим розкладом Енгеля числа $x \in (0,1]$ називається його представлення у вигляді ряду

$$\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{(p'_1 - 1)p'_2} + \cdots + \frac{1}{(p'_1 - 1)\cdots(p'_{n-1} - 1)p'_n} + \cdots , \tag{2}$$

де $p'_n \in \mathbb{N}$ та $p'_{n+1} > p'_n \geq 2$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Ряд (2) та його суму x коротко позначають $\Delta^{E_{\mathrm{mod}}}_{p'_1 p'_2 \ldots}$. Число $p'_n = p'_n(x)$ називають n-ною E_{mod}-цифрою числа x.

Розклади Енгеля належать до таких сімейств розкладів дійсних чисел як додатні розклади Перрона [1], розклади Оппенгейма [2] та I-F-розклади [3].

Теорема 1 (Принцип фрактальної квазіеквівалентності для розкладів Енгеля)**.** *Нехай $\psi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ — така функція, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\psi(n)} < \infty$. Також нехай $\mathfrak{M}$ — деяка множина нескінченних послідовностей натуральних чисел, причому для кожної послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}$ нерівність $a_n \geq \psi(n)$ виконується для всіх достатньо великих n. Тоді*

$$\dim_H \{x \in (0,1] \colon (p_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}\} = \dim_H \{x \in (0,1] \colon (p'_n(x) - n + 1)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}\},$$

де $\dim_H(\cdot)$ — розмірність Гаусдорфа.

Принцип фрактальної квазіеквівалентності для розкладів Енгеля разом з принципом фрактальної еквівалентності для додатних та знакозмінних розкладів Перрона [4] є основою для систематичного перенесення фрактальних властивостей класичних розкладів Енгеля на розклади Остроградського–Серпінського–Пірса [5].

Ця робота підтримана грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, M.P.M.).

[1] Moroz M., Representation of Real Numbers by Perron Series, Their Geometry, and Some Applications, *J. Math. Sci.* **279** (2024), 384–399.

[2] Oppenheim A., The representation of real numbers by infinite series of rationals, *Acta Arithmetica* **21** (1972), 391–398.

[3] Garko I., Nikiforov R., Torbin G., On the G-isomorphism of probability and dimensional theories of representations of real numbers and fractal faithfulness of systems of coverings, *Theory Probab. Math. Stat.* **94** (2017), 17–36.

[4] Moroz M., Faithfulness and fractal (quasi-)equivalence principles for Perron, Engel, and Pierce expansions, 2025, 20 pp., arXiv:2510.03373.

[5] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування, Наукова Думка, Київ, 2013, 288 с.