Регулярність розв'язків деяких рівнянь, керованих загальними стохастичними мірами

Б. І. Манікін[1]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

bmanikin@knu.ua

В даній доповіді будемо розуміти стохастичну міру в наступному сенсі. Нехай $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин X, де X — довільна множина, $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — множина всіх випадкових величин на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тоді стохастичною мірою на $\mathcal{B}$ будемо називати σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to L_0$.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t,x)dt + \sigma(t,x)\,d\mu(t) = -f(t,x,u(t,x)), & (t,x) \in D_T, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in S_T, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in B\,. \end{cases} \tag{1}$$

де μ — стохастична міра на борелівській σ-алгебрі інтервалу $(0,T]$, B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $D_T = (0,T] \times B$, $S_T = (0,T] \times \partial B$, оператор $\mathcal{L}$ має вигляд

$$\mathcal{L}u(t,x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + c(x)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t},$$

Розв'язок (1) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy \\ + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy, \end{aligned} \tag{2}$$

де $G(t,x;s,y)$ — функція Гріна крайової задачі $\mathcal{L}u = 0$, $u|_{(t,x)\in S_T} = 0$. В статті [1] наведено умови на функції u_0, f, σ, коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$, область B та міру μ, за яких розв'язок (2) існує і для довільних $\delta \in (0,T)$, B', де $\bar{B}' \subset B$, задовольняє співвідношення

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \le L(\omega)(|x_1 - x_2|^{\gamma_1} + |t_1 - t_2|^{\gamma_2})$$

для всіх $t_1,\ t_2 \in [\delta, T]$, $x_1,\ x_2 \in \bar{B}'$ і деяких додатних сталих L, γ_1, γ_2.

Також розглянемо рівняння вигляду

$$\begin{cases} du(t,x) = \Delta_\lambda u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(x), & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

де через Δ_λ позначаємо оператор дробової похідної. Розв'язок (3) розуміємо як розв'язок інтегрального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_\lambda(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dyds \\ + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t G_\lambda(t-s,x-y)\sigma(s,y)ds, \end{aligned} \tag{4}$$

де
$$G_\lambda(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} e^{-t|\xi|^\lambda} d\xi.$$

Показано, що при $\lambda \in (3/2, 2]$ за певних умов на функції u_0, f та σ розв'язок (4) існує, є єдиним та при довільних $\delta \in (0, T)$ і $K > 0$ задовольняє умові

$$|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)| \le L(\omega)(|x_1 - x_2|^{\gamma_1} + |t_1 - t_2|^{\gamma_2})$$

для всіх t_1, $t_2 \in [\delta, T]$, x_1, $x_2 \in [-K, K]$ і деяких додатних сталих L, γ_1, γ_2.

[1] Manikin B., Boundary-value problem for a parabolic equation with a general stochastic measure, *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **113** (2025), no. 2, 133–151.