Чисельне диференціювання функцій двох змінних за допомогою розкладу по поліномах Чебишова

М. М. Кисельов[1], **С. Г. Солодкий**[1]
[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна
kyselovpm@gmail.com, solodky@imath.kiev.ua

Нехай $\omega(t,\tau) = (1-t^2)^{-1/2}(1-\tau^2)^{-1/2}$. Через $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}(Q)$ позначимо гільбертів простір дійснозначних функцій $f(t,\tau)$, визначених на $Q = [-1,1]^2$, зі скалярним добутком

$$\langle f, g\rangle = \int_Q \omega(t,\tau)\, f(t,\tau)\, g(t,\tau)\, d\tau dt$$

та стандартною нормою

$$\|f\|^2_{L_{2,\omega}} = \sum_{k,j=0}^{\infty} |\langle f, T_{k,j}\rangle|^2 < \infty,$$

де $\{T_k(t)\}_{k\geq 0}$ — ортонормована система поліномів Чебишова першого роду відносно вагової функції $\omega(t,\tau)$ [1], а

$$\langle f, T_{k,j}\rangle = \int_Q \omega(t,\tau)\, f(t,\tau)\, T_k(t)\, T_j(\tau)\, d\tau dt, \quad k,j = 0,1,2,\ldots,$$

є коефіцієнтами Фур'є-Чебишева функції f. Вважатимемо, що замість точних значень коефіцієнтів Фур'є–Чебишова $\langle f, T_{k,j}\rangle$ відомі лише збурені дані $\langle f^\delta, T_{k,j}\rangle$ з рівнем похибки

$$\|\overline{\xi}\|_{\ell_p} \leq \delta, \quad \overline{\xi} = \{\langle f - f^\delta, T_{k,j}\rangle\}, \quad 0<\delta<1, \tag{1}$$

при деякому $1 \leq p \leq \infty$. Крім того, нехай $C = C(Q)$ – простір неперервних на Q дійснозначних функцій двох змінних з обмеженою рівномірною нормою.

Об'єктом нашого дослідження є функції із класу Вінера [2]:

$$W^{\overline{\mu}}_{s,2} := W^{\overline{\mu}}_{s,2}(Q) := \left\{ f \in L_{2,\omega}(Q) : \|f\|^s_{s,\overline{\mu}} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \underline{k}^{s\mu_1}\, \underline{j}^{s\mu_2} |\langle f, T_{k,j}\rangle|^s \leq 1 \right\},$$

де $\overline{\mu} = (\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1,\mu_2>0$, $1\leq s<\infty$, $\underline{k} = \max\{1,k\}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Для наближення частинної похідної $f^{(r,0)}(t,\tau)$, $r\in\mathbb{N}$, запропоновано метод зрізання за допомогою гіперболічного хреста:

$$\mathcal{D}^{(r,0)}_{n,\gamma} f^\delta(t,\tau) = \sum_{k=r}^{n} \sum_{j=0}^{(n/k)^{1/\gamma}} \langle f^\delta, T_{k,j}\rangle\, T^{(r)}_k(t)\, T_j(\tau), \quad \gamma\geq 1, \tag{2}$$

де величина n виконує роль параметра регуляризації.

Основний результат сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай $f \in W^{\overline{\mu}}_{s,2}$, $1\leq s<\infty$, $\mu_1 > 2r - 1/s + 1$, $\mu_2 > \mu_1 - 2r$, і виконується умова (1). Тоді для $n \asymp \delta^{-1/(\mu_1 - 1/p + 1/s)}$ та $1 \leq \gamma < \frac{\mu_2 + 1/s - 1}{\mu_1 - 2r + 1/s - 1}$ справджується оцінка*

$$\|f^{(r,0)} - \mathcal{D}^{(r,0)}_{n,\gamma} f^\delta\|_C \leq c\, \delta^{\frac{\mu_1 - 2r + 1/s - 1}{\mu_1 - 1/p + 1/s}}.$$

Знайдена оцінка є непокращуваною за порядком на класі $W^{\overline{\mu}}_{s,2}$, що випливає з результатів [3].

[1] Mason J. C., Handscomb D. C., Chebyshev Polynomials, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2002, 360 pp.

[2] Kolomoitsev Y., Lomako T., Tikhonov S., Sparse grid approximation in weighted Wiener spaces, *Journal of Fourier Analysis and Applications* **29** (2023), 19.

[3] Semenova Ye. V., Solodky S. G., On optimal recovery and information complexity in numerical differentiation and summation, *Journal of Complexity* **92** (2026), 101975.