Функціональні нерівності для стохастичних диференціальних рівнянь з взаємодією

К. Кучинський[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

kuchinskii1999@gmail.com

Розглядаємо стохастичне диференціальне рівняння з взаємодією [1]

$$\begin{cases} dX_t(u) = a\big(X_t(u), \mu_t\big)\, dt + \sigma\big(X_t(u)\big)\, dB_t, \\ X_0(u) = u, \\ \mu_t = \mu_0 \circ X_t^{-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Тут μ_0 — задана початкова міра, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ — простір борелівських ймовірнісних мір на $\mathbb{R}^d$ зі скінченним другим моментом, $a : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ — коефіцієнт переносу, а $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — коефіцієнт дифузії.

Припущення. Існують сталі $L, L_\sigma, L_\mu < \infty$ такі, що:

1. для кожної $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ відображення $x \mapsto a(x, \mu)$ є $C^2(\mathbb{R}^d)$ і
$$\sup_{x,\mu} \|\partial_x a(x, \mu)\|_{\mathrm{op}} \le L;$$
2. $\sigma \in C^2(\mathbb{R}^d)$ і
$$\sup_{x} \|\partial \sigma(x)\|_{\mathrm{op}} \le L_\sigma;$$
3. для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ та $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$
$$|a(x, \mu) - a(x, \nu)| \le L_\mu W_2(\mu, \nu),$$
де W_2 — метрика Васерштайна порядку 2.

За наведених припущень з [2, теорема 2.3.1] випливає існування та єдиність розв’язку рівняння (1).

Мотивація подальших результатів така: контроль $J_t(u) = \partial_u X_t(u)$ приводить до контролю випадкової сталої Ліпшица

$$\mathcal{K}_t(K) := \sup_{u\in K} \|\partial_u X_t(u)\|_{\mathrm{op}}$$

на компактах $K \subset \mathbb{R}^d$, а це, своєю чергою, дозволяє переносити геометричні та функціональні властивості від початкової міри μ_0 до випадкової міри μ_t.

Твердження 1. *Для кожного компакту $K \subset \mathbb{R}^d$, кожного $p \ge 1$ та всіх $t \ge 0$ маємо $\mathbb{E}\,\mathcal{K}_t(K)^p < \infty$. Більше того, існують сталі $C_{p,K}, c_p < \infty$ такі, що*

$$\mathbb{E}\,\mathcal{K}_t(K)^p \le C_{p,K} e^{c_p t}.$$

Щоб сформулювати наступний результат, нагадаємо означення нерівності концентрації [4].

Означення 1. Кажемо, що ймовірнісна міра μ на $\mathbb{R}^d$ задовольняє нерівність концентрації з функцією Ψ, якщо для кожної борелівської множини $A \subset \mathbb{R}^d$ такої, що $\mu(A) \geq 1/2$, та кожного $r \geq 0$ виконується

$$\mu(A_r) \geq 1 - \Psi(r), \qquad A_r := \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, A) \leq r\}.$$

Твердження 2 (Концентрація міри). *Нехай носій μ_0 міститься в компакті K і μ_0 задовольняє нерівність концентрації з функцією Ψ. Тоді майже напевно міра μ_t задовольняє нерівність концентрації з функцією $r \mapsto \Psi\big(r/\mathcal{K}_t(K)\big)$. Зокрема, гауссова концентрація зберігається з випадковою сталою порядку $\mathcal{K}_t(K)^2$.*

Для наступного твердження нагадаємо означення нерівності Пуанкаре [3].

Означення 2. Кажемо, що ймовірнісна міра μ на $\mathbb{R}^d$ задовольняє нерівність Пуанкаре $\mathrm{PI}(C_P)$, якщо для всіх $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ маємо

$$\int \left(f - \int f \, d\mu\right)^2 d\mu \leq C_P \int |\nabla f|^2 \, d\mu.$$

Твердження 3 (Нерівність Пуанкаре). *Якщо μ_0 має компактний носій і задовольняє нерівність Пуанкаре $\mathrm{PI}(C_P)$, то майже напевно міра μ_t задовольняє нерівність Пуанкаре $\mathrm{PI}\big(C_P \mathcal{K}_t(K)^2\big)$.*

Нарешті, сформулюємо транспортну нерівність Талаграна [4].

Означення 3. Нехай $p \geq 1$. Кажемо, що ймовірнісна міра μ на $\mathbb{R}^d$ задовольняє транспортну нерівність Талаграна $T_p(C_T)$, якщо для кожної ймовірнісної міри $\nu \ll \mu$

$$W_p(\nu, \mu)^2 \leq 2C_T \, \mathrm{H}(\nu \mid \mu), \qquad \mathrm{H}(\nu \mid \mu) := \int \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\nu.$$

Твердження 4 (Нерівність Талаграна). *Якщо μ_0 має компактний носій і задовольняє транспортну нерівність Талаграна $T_p(C_T)$, то майже напевно міра μ_t задовольняє нерівність $T_p\big(C_T \mathcal{K}_t(K)^2\big)$.*

Таким чином, оцінки для матриці Якобі стохастичного потоку забезпечують контроль його сталої Ліпшица на компактах і дають наведені вище результати про перенесення нерівності концентрації, нерівності Пуанкаре та транспортної нерівності Талаграна від початкової міри μ_0 до випадкових мір μ_t.

[1] Dorogovtsev A. A., *Stochastic equations with coefficients depending on a measure-valued process*, Stochastic Processes and their Applications **113** (2004), no. 2, 281–303.

[2] Dorogovtsev A. A., Measure-valued Processes and Stochastic Flows, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 3, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, Berlin, 2023, 214 pp.

[3] Bakry D., Gentil I., Ledoux M., Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators, Springer, 2014, 552 pp.

[4] Ledoux M., The Concentration of Measure Phenomenon, American Mathematical Society, 2001, 179 pp.