Про поведінку діаметра образу кулі на нескінченності

Р. Р. Салімов[1], Б. А. Кліщук[1], М. В. Стефанчук[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

ruslan.salimov1@gmail.com, kban1988@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \ \geqslant\ 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді *p–модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) \ =\ \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Тут m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для довільних множин E, F і G в $\mathbb{R}^n$, позначимо через $\Delta(E, F, G)$ сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E та F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ та $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1,\, 2\,.$$

Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant\ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,\ r_1, r_2)$ і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

Нехай ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ — середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x - x_0| = r\}$, $d\mathcal{A}$ — елемент площі поверхні.

Для множини $E \subset \mathbb{R}^n$ будемо позначати через $\operatorname{diam} E$ її евклідовий діаметр.

Справедливе наступне твердження, див. наслідок 1 в [1].

Теорема 1. *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *для* $p > n$ *і для деяких чисел* $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(x_0) > 0$ *виконується наступна умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant \kappa\, t^{\alpha} \tag{1}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$. *Якщо* $\alpha \in [0, p-n)$, *тоді*

$$\liminf_{R \to \infty} \frac{\operatorname{diam} f(\overline{B(x_0, R)})}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \tag{2}$$

Якщо $\alpha = p-n$, *тоді*

$$\liminf_{R \to \infty} \frac{\operatorname{diam} f(\overline{B(x_0, R)})}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geqslant 2\,\kappa^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0, \tag{3}$$

де $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$.

Ця робота була підтримана грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, Б.А.К., Р.Р.С., М.В.С.).

[1] Klishchuk B., Salimov R., Stefanchuk M., On the asymptotic behavior of the diameter of image of a ball at infinity, *Ukr. Math. J.* **77** (2025), 867–889.