Критерій існування єдиного розв'язку початкової задачі для неявного лінійного різницевого рівняння першого порядку над скінченним комутативним кільцем з одиницею

М. В. Генералов, О. Л. Півень

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

aleksei.piven@karazin.ua, mykola.heneralov@karazin.ua

Розглядається початкова задача

$$BX_{n+1} = AX_n + F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{1}$$

$$X_0 = Y_0 \tag{2}$$

над скінченним комутативним кільцем $R \neq \{0\}$ з одиницею, де $A, B, F_n (n \in \mathbb{Z}_+), Y_0$ — задані елементи цього кільця. Рівняння (1) називається *неявним*, якщо B — необоротний елемент кільця R [1, 2]. Раніше це рівняння досліджувалось над кільцем лишків $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ в [1] і над кільцем $\mathbb{Z}_p[t]/(t^2)$ для простих p в [2].

За теоремою VI.2 [3, p. 95], кільце R ізоморфне прямій сумі $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} R_i$ локальних скінченних комутативних кілець $R_i \neq \{0\}$ з одиницею. Позначимо через $\pi_i \colon R \to R_i$ відповідні канонічні проекції, $i = 1, \ldots, r$. Визначимо множини I_1, I_2, I_3 наступним чином:

- $I_1 = \{i \in \{1, \ldots, r\} \mid \pi_i(B)$ — оборотний елемент кільця $R_i\}$
- $I_2 = \{i \in \{1, \ldots, r\} \setminus I_1 \mid \pi_i(A)$ — оборотний елемент кільця $R_i\}$
- $I_3 = \{1, \ldots, r\} \setminus (I_1 \cup I_2)$.

Тоді $R \cong R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)}$, де $R^{(j)} = \bigoplus\limits_{i \in I_j} R_i$, при цьому будемо вважати $R^{(j)} = \{0\}$, якщо $I_j = \varnothing$, $j = 1, 2, 3$. Позначимо через $\pi^{(j)}$ канонічну проекцію з R у $R^{(j)}$ і визначимо наступні елементи:

$$B^{(j)} = \pi^{(j)}(B),\ A^{(j)} = \pi^{(j)}(A),\ F_n^{(j)} = \pi^{(j)}(F_n),\ Y_0^{(j)} = \pi^{(j)}(Y_0), \quad j = 1, 2.$$

Нехай ψ — ізоморфізм кілець $R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus R^{(3)}$ і R. Через $\operatorname{ind} u$ позначається індекс нільпотентності нільпотентного елементу u. Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову існування єдиного розв'язку початкової задачі (1), (2).

Теорема 1. *Початкова задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $(A, B) = R$ *і виконано одну з наступних умов.*

1. $R^{(2)} = \{0\}$.
2. $R^{(2)} \neq \{0\}$ *і справджується рівність*

$$Y_0^{(2)} = -\sum_{s=0}^{\operatorname{ind} B^{(2)} - 1} \left(A^{(2)}\right)^{-s-1} \left(B^{(2)}\right)^{s} F_s^{(2)}.$$

При цьому єдиний розв'язок початкової задачі (1), (2) *визначається формулою*

$$X_n = \begin{cases} B^{-n}A^nY_0 + \sum\limits_{s=0}^{n-1} B^{-s-1}A^sF_{n-s-1}, & R^{(2)} = \{0\}, \\ -\sum\limits_{s=0}^{\mathrm{ind}B-1} A^{-s-1}B^sF_{n+s}, & R^{(1)} = \{0\}, \\ \psi\left(\eta_n^{(1)}, \eta_n^{(2)}, 0\right), & R^{(1)} \neq \{0\}, R^{(2)} \neq \{0\}, \end{cases}$$

де

$$\eta_n^{(1)} = \left(B^{(1)}\right)^{-n}\left(A^{(1)}\right)^nY_0^{(1)} + \sum_{s=0}^{n-1}\left(B^{(1)}\right)^{-s-1}\left(A^{(1)}\right)^sF_{n-s-1}^{(1)},$$

$$\eta_n^{(2)} = -\sum_{s=0}^{\mathrm{ind}B^{(2)}-1}\left(A^{(2)}\right)^{-s-1}\left(B^{(2)}\right)^sF_{n+s}^{(2)}.$$

Роботу виконано за часткової підтримки Фонду Ахієзера (Харків).

[1] Heneralov M. V., Piven' A. L., Implicit linear difference equation over residue class rings, *Algebra and Discrete Mathematics* **37** (2024), no. 1, 85–105.

[2] Генералов М. В., Неявні лінійні різницеві рівняння над скінченними комутативними кільцями порядку p^2 з одиницею, *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математика, прикладна математика і механіка»* **101** (2025), с. 21–30.

[3] Macdonald B. R., Finite commutative rings with identity, New York: M. Dekker, 1974.