All-path опуклість: інваріанти на графах та гіперграфах

В. О. Гапоненко[1,2], **С. О. Козеренко**[2]

[1]Кафедра математики, Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна

[2]Факультет комп'ютерних наук, Київська Школа Економіки, Київ, Україна

vladyslav.haponenko@gmail.com, kozerenkosergiy@ukr.net

Об'єктом дослідження цієї роботи є інваріанти абстрактних опуклостей, зокрема числа Helly, Radon, Carathéodory та Exchange. Ці інваріанти характеризують відокремлюваність та щільність опуклих множин. Деякі з них уже досліджувалися для Δ-опуклості в роботі [1]. Зокрема, у [1] знайдено точні значення чисел Helly та Radon для хордальних графів і графів блоків.

Нехай X – множина, а $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ – родина її підмножин, що задовольняє такі аксіоми: (1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$; (2) $\mathcal{C}$ замкнена відносно довільних перетинів; (3) $\mathcal{C}$ замкнена відносно об'єднань вкладених систем множин. Тоді пара $(X, \mathcal{C})$ називається *опуклим простором.*

Нехай $(X, \mathcal{C})$ – опуклий простір і $S \subseteq X$. Множина $S \subseteq X$ називається *C-залежною*, якщо $\langle S\rangle \subseteq \bigcup_{a\in S}\langle S \setminus \{a\}\rangle$; *H-залежною*, якщо $\bigcap_{a\in S}\langle S \setminus \{a\}\rangle \neq \emptyset$; *R-залежною*, якщо існує розбиття $S = S_1 \sqcup S_2$ таке, що $\langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle \neq \emptyset$; *E-залежною*, якщо для кожного $b \in S$ виконується $\langle S\setminus\{b\}\rangle \subseteq \bigcup_{a\in S}\langle S\setminus\{a\}\rangle$. В іншому разі S називається відповідно *незалежною.*

Числа $h(X)$, $r(X)$, $c(X)$, $e(X)$ (числа Helly, Radon, Carathéodory, Exchange) для опуклого простору $(X, \mathcal{C})$ дорівнюють $n - 1$, де $n \in \mathbb{N}$, а всі множини $S \subseteq X$ із потужністю $|S| \geq n$ є відповідно залежними.

Ми охарактеризували залежні множини та обчислили згадані вище інваріанти для all-path опуклості на зв'язних графах і гіперграфах. Множина $S \subseteq V(G)$ у зв'язному графі G називається *all-path опуклою*, якщо разом із кожною парою своїх точок $a, b \in S$ вона містить і всі множини вершин простих ланцюгів між a, b.

Твердження 1. *Будь-яка множина $S \subseteq V(G)$ із $|S| = 3$ у зв'язному графі G є H_{ap}-залежною.*

Наслідок 1. *У зв'язному графі G число Helly $h(G) = 2$ для all-path опуклості.*

Твердження 2. *У зв'язному графі G, будь-яка підмножина $S \subseteq V(G)$ із потужністю $|S| = 4$ є R_{ap}-залежною.*

Наслідок 2. *У зв'язному графі G число Radon $r(G) \leq 3$ для all-path опуклості.*

Твердження 3. *У зв'язному графі G будь-яка підмножина $S \subseteq V(G)$ із потужністю $|S| \geq 3$ є C_{ap}-залежною.*

Наслідок 3. *У зв'язному графі G число Carathéodory $c(G) = 2$ для all-path опуклості.*

Оскільки для множини S справедливо включення $\langle S \setminus \{b\}\rangle \subseteq \langle S\rangle$, а всі дво-елементні підмножини є E-залежними, то маємо наступний результат.

Наслідок 4. *У зв'язному графі G число Exchange є рівним числу Carathéodory для all-path опуклості.*

Гіперграфом H називається впорядкована пара (V, E), де V є множиною вершин, а множина ребер E є деякою сім'єю підножин V. Попередньо, для гіперграфів існувало поняття блоку запропоноване в [4]. Там для скороченого гіперграфа H, означили блок як максимальний за включенням зв'язний породжений підгіперграф H, що не має множини з'єднання. Але таке означення має недолік – воно дозволяє циклам лежати у декількох блоках. Тому, щоби узгодити загальні властивості блоків у графах та гіперграфах, а також їх властивості у контексті all-path опуклості, ми ввели нове поняття *сильного блоку*:

Означення 1. У простому гіперграфі H *сильним блоком* називається його скорочений максимальний (за включенням) підгіперграф без мостів чи точок з'єднання.

Це поняття дозволяє отримати характеризацію all-path опуклих множин для гіперграфів, аналогічну до відповідної характеризації для простих графів із [3].

Теорема 1. *У простому гіперграфі H із графом інцидентності $G(H)$, підмножина $B \subseteq V(H)$ з потужністю $|B| > 1$ є all-path опуклою тоді й тільки тоді, коли скорочений підгіперграф B є зв'язним об'єднанням сильних блоків.*

Зазвичай числа Helly та Radon у гіперграфа H відрізняються від відповідних інваріантів його графа інцидентності $G(H)$. Проте, вони збігатимуться за умови, що H не має мостів.

Твердження 4. *Нехай H є зв'язним простим гіперграфом без мостів. Тоді H має число Helly, що збігається із числом Helly графа $G(H)$.*

Твердження 5. *Для зв'язного простого гіперграфа H без мостів будь-яка підмножина $S \subseteq V(H)$ із потужністю $|S| \geq 4$ є R-залежною.*

На відміну від чисел Helly та Radon, числа Carathéodory та Exchange однакові для гіперграфа H та його графа інцидентності $G(H)$.

Твердження 6. *Для зв'язного простого гіперграфа H будь-яка підмножина $S \subseteq V(H)$ із потужністю $|S| \geq 3$ є C-залежною.*

Наслідок 5. *Для зв'язного простого гіперграфа H маємо:*

$$c(H) = e(H) = c(G(H)) = e(G(H)) = 2.$$

[1] Anand B. S., Chandran L. S., Murthy N. N., Parthasarathy G. J., Thomas S., Helly number, Radon number and rank in Δ-convexity on graphs, *Conference on Algorithms and Discrete Applied Mathematics* (2025), 292–306.

[2] Bahmanian M. A., Sajna M., Connection and separation in hypergraphs, *Theory Appl. Graphs* **2** (2015), no. 2, Article 5.

[3] Haponenko V., Kozerenko S., All-path convexity: two characterizations, general position number, and one algorithm, *Discrete Math. Lett.* **13** (2024), 58–65.

[4] Shanavas A. V., Changat M., Stadler P. F., On the cut-vertex and the interval transit functions of hypergraphs, *Graphs Combin.* **41** (2025), no. 1, Article 4.