# Лінійна нормально розв'язна крайова задача з виродженим імпульсним впливом

**П. Беннер[1], С. М. Чуйко[1,2], В. О. Чуйко[3]**

[1]Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany,

[2]Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна,

[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64 Volodymyrska Street, Kyiv, Україна.

*benner@mpi-magdeburg.mpg.de, chujko-slav@ukr.net, vitya.chuyko@gmail.com*

Нами досліджено задачу про побудову розв'язків [1–3]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}$$

системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z(\tau_i) = S_i\, z(\tau_i - 0) + a_i, \quad a_i \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

у фіксовані моменти часу

$$a := \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ ... \ < \tau_p < \ \ldots < b. \tag{2}$$

Тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[a,b]$ $(n{\times}n)$-вимірна матриця, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — неперервна вектор-функція.

За умови скінченої кількості $p$ імпульсних збурень у фіксовані моменти часу (2) задача про побудову розв'язків системи (1) з невиродженим

$$\det\,(I_n + S_i) \neq 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots$$

імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) := z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots$$

докладно вивчена (див., напр., [1–3]). Обмежена послідовність моментів часу

$$\left\{\tau_k\right\}_{k=1}^{\infty} \in [a,b]$$

монотонно зростає, а тому, згідно з теоремою Вейєрштраса, збігається на відрізку $[a,b]$. Покладемо $\lim_{k\to\infty} \tau_k = b$.

Нами також досліджено задачу про знаходження умов обмеженості розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженим імпульсним впливом (1), а саме, за наявності принаймні одного моменту $t = \tau_i$ імпульсного впливу, для якого матриця $I_n + S_i$ вироджується:

$$\det(I_n + S_i) = 0, \quad 0 < i < \infty.$$

Крім того, отримано умови розв'язності нормально розв'язної крайової задачі

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \ell_2 \tag{3}$$

для системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженим імпульсним впливом у фіксовані моменти часу за умови нескінченої кількості імпульсних збурень. Тут $A(t)$ —

неперервна на відрізку $[a,b]$ $(n\times n)$-вимірна матриця, $f(t)$ — неперервна вектор-функція, і лінійний обмежений векторний функціонал

$$\mathcal{L}z(\cdot):\mathbb{C}^1\Big\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\}\to\mathbb{R}^m.$$

Встановлені відмінності структури розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь з невиродженим імпульсним впливом у фіксовані моменти часу за умови нескінченої кількості імпульсних збурень, вигляду (3), від розв'язків системи диференціальних рівнянь за умови скінченої кількості вироджених імпульсних збурень, вигляду (1).

Отримані нами умови обмеженості розв'язків нормально розв'язної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з виродженим імпульсним впливом у фіксовані моменти часу (3) узагальнюють результати [1–3] на випадок скінченої кількості вироджених імпульсних збурень і можуть бути перенесені на нормально розв'язні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь із сингулярним збуренням [4], на нормально розв'язні крайові задачі для систем функціонально-диференціальних рівнянь з запізненням [5,6], а також на системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом більш загального вигляду [7,8].

*Співавтор статті Чуйко В.О. частково підтриманий грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при Національній академії наук України на 2025 — 2026 рр.*

## Література

[1] Boichuk A. A., Samoilenko A. M., Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition, Berlin, Boston, De Gruyter, 2016, 298 pp.

[2] Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Impulsive Differential Equations, World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser. A, 14, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1995, x+462 pp.

[3] Boichuk A. A., Chuiko E. V., Chuiko S. M., Generalized Green operator of a boundary-value problem with degenerate pulse influence, *Ukr. Math. J.* **48** (1996), no. 5, 652–660.

[4] Kiguradze I. T., Shekhter B. L., Singular boundary-value problems for ordinary second-order differential equations, *J. Math. Sci.* **43** (1988), 2340–2417.

[5] Domoshnitsky A., Drakhlin M., Nonoscillation of first order impulse differential equations with delay, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **206** (1997), 254–269.

[6] Domoshnitsky A., Drakhlin M., Litsyn E., Nonoscillation and positivity of solutions to first order state dependent differential equations with impulses in variable moments, *Journal of Differential Equations*, **228** (2006), 39–48.

[7] Chuiko S. M., A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action, *Differential Equations* **37** (2001), no. 8, 1189–1193.

[8] Chuiko S. M., Least-squares method in the theory of ill-posed linear boundary-value problems with pulse action, *Ukr. Math. J.* **62** (2010), no. 5, 794–803.