# Реберно-максимальні графи з парними відстанями між точками не-з'єднання

**К. О. Антошина[1,2], С. О. Козеренко[2]**
[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна
[2]Приватна установа "Університет "Київська школа економіки", Київ, Україна
*kantoshyna@imath.kiev.ua, kozerenkosergiy@ukr.net*

У цій роботі всі графи скінченні, прості, неорієнтовані та *зв'язні* (якщо протилежне не вказане явно). *Околом* вершини $u \in V(G)$ у графі $G$ називається множина $N_G(u) = \{x \in V(G) : \{u,x\} \in E(G)\}$. Степенем вршини $u$ називається потужність її околу $|N_G(u)|$. Вершина $u$ називається *точкою з'єднання*, якщо після її видалення граф $G - u$ стає незв'язним. *Блоковим степенем* вершини $u$ називається кількість компонент зв'зності в $G - u$. Граф є *двозв'язним*, якщо він не містить точок з'єднання. *Блоком* у графі називається будь-який його максимальний (за включенням) двозв'язний підграф.

У статті [1, Corollary 3.5] було охарактеризовано графи з парними відстанями між точками не-з'єднання (NCE-графи) — це в точності двочасткові графи, у яких точки не-з'єднання лежать в одній частці. Частку, яка містить усі точки не-з'єднання назвемо *NC-часткою.* Точки з'єднання NCE-графа $G$, які лежать в NC-частці, називатимемо *nc-парними*; а ті, що лежать у протилежній частці — *nc-непарними.*

Нагадаємо, що граф називається *бі-блоковим*, якщо всі його блоки є повними двочастковими графами. Будемо називати NCE-граф *реберно-максимальним*, якщо він не є кістяковим підграфом жодного строго більшого NCE-графа. Реберно-максимальні NCE-графи допускають наступну характеризацію.

**Теорема 1.** [1, Theorem 3.16] *NCE-граф $G$ є реберно-максимальним тоді й лише тоді, коли $G \simeq K_{1,m}$ або виконуються наступні умови:*

1. *$G$ є бі-блоковим графом;*
2. *для будь-якої nc-непарної вершини $u \in V(G)$ справедливо:*
   (a) $\mathrm{bd}_G(u) = 2$,
   (b) *$u$ відділяє будь-яку точку з'єднання з околу $N_G(u)$ від інших вершин із $N_G(u)$.*

Нехай $\mathcal{G}$ – деякий клас графів. Його представник $G \in \mathcal{G}$ називається *реберно-критичним*, якщо $G + e \notin \mathcal{G}$ для всіх $e \notin E(G)$. Реберно-максимальні графи у заданому класі $\mathcal{G}$ завжди реберно-критичні. Виявляється, що для класу NCE-графів ці властивості еквівалентні.

**Лема 1.** *NCE-граф реберно-максимальний тоді й лише тоді, коли він реберно-критичний.*

Нехай $\mathcal{G}$ – деякий клас графів. Граф $G \in \mathcal{G}$ називається *реберно-максимальним зі збереженням блокової структури*, якщо $G$ не є кістяковим підграфом строго більшого графа $H \in \mathcal{G}$ із тими самими блоками, що й в $G$.

**Твердження 1.** *NCE-граф $G$ є максимальним зі збереженням блокової структури тоді й лише тоді, коли $G$ є бі-блоковим.*

Через $\mathrm{Cut}(G)$ позначимо множину точок з'єднання в графі $G$. Граф $G \in \mathcal{G}$ називається *реберно-максимальним зі збереженням структури точок з'єднання*, якщо $G$ не є кістяковим підграфом строго більшого графа $H \in \mathcal{G}$ із $\mathrm{Cut}(G) = \mathrm{Cut}(H)$. Зауважимо, що кожен реберно-максимальний граф зі збереженням структури точок з'єднання є також і реберно-максимальним зі збереженням блокової структури (але, взагалі кажучи, не навпаки).

**Теорема 2.** *NCE-граф $G$ є максимальним зі збереженням структури точок з'єднання тоді й лише тоді, коли $G$ задовольняє наступні дві умови:*

1. *$G$ є бі-блоковим графом;*
2. *будь-яка nc-непарна вершина $u \in V(G)$ з $\mathrm{bd}_G(u) \geq 3$ може бути суміжна лише з висячими вершинами або з (nc-парними) вершинами блокового степеня $2$.*

*Перший автор висловлює вдячність за фінансову підтримку Національному фонду досліджень України (номер проєкту 2025.07/0405) і фонду Саймонса (грант SFI-PD-Ukraine-00014586, K.O.A.).*

[1] Antoshyna K., Kozerenko S., Graphs with odd and even distances between non-cut vertices, *Opuscula Math.* **45** (2025), no. 1, 5–25.