Деякі використання функцій Радемахера і рядів Уолша для нега-двійкового зображення чисел

В. О. Єлагін
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
yelahin@imath.kiev.ua

Нехай $A \equiv \{0;1\}$ — алфавіт двійкової системи числення, $L \equiv A \times A \times \cdots$ – множина (простір) послідовностей елементів алфавіту (послідовностей нулів та одиниць).

Нагадаємо, що функціями Радемахера $r_k(x)$ для класичного двійкового зображення називаються функції з періодом (1), визначені на піввідрізку $[0;1)$ рівностями:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0;\frac{1}{2}), \\ -1, & \text{при } x \in [\frac{1}{2};1), \end{cases}$$

де $r_k(x) = r_0(\{2^k x\}), k = 1, 2, \ldots$.

Функції Уолша є всеможливими добутками функцій Радемахера.

Доповідь присвячена аналогам функцій Радемахера та Уолша для нега-двійкового зображення чисел, яке визначається розкладами:

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} - \cdots\right) \equiv \Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}, \alpha_n \in A.$$

Циліндром рангу n з основою $c_1c_2\cdots c_n$, що відповідає нега-двійковому зображенню чисел відрізку $[0;1]$, називають множину

$$\Delta^{-2}_{c_1c_2\ldots c_n} = \{x : \ x = \Delta^{-2}_{c_1c_2\ldots c_n\beta_1\beta_2\ldots}, (\beta_n) \in L\}.$$

Означення 1. На піввідрізку [0;1) означимо послідовність функкцій $(\overline{r_n})_{n=0}^{\infty}$:

$$\overline{r_0}(x) = \overline{r_0}(\Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2};1), \\ -1 & \text{якщо } \alpha_1(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [0;\frac{1}{2}). \end{cases}$$

$\overline{r_n}(x) = \overline{r_0}(\Delta^{-2}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}), n \in \mathbb{N}$.

Систему (послідовність) аналогів функцій Уолша $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ми побудуємо з використанням традиційної нумерації Пеллі.

Покладемо $\omega_0(x) \equiv 1$. Для означення функції $\omega_n(x)$ число n представляється у двійковій системі числення:

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_0, \ \varepsilon_i \in A.$$

Звідки можна бачити, що $2^k \leq n < 2^{k+1}$, де $k = k(n)$. Тепер означуємо функцію ω_n рівністю:

$$\omega_n(x) \equiv \prod_{i=0}^{k} \overline{r_i}^{\varepsilon_i}(x) = \overline{r_k}(x) \prod_{i=0}^{k-1} \overline{r_i}^{\varepsilon_i}(x).$$

Теорема 1. *Якщо $n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0$, то аналог функції Уолша $\omega_n(x) = \overline{r_k}(x)\overline{r_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}(x)\ldots\overline{r_0}^{\varepsilon_0}(x)$ є сталим на кожному циліндрі $k+1$ рангу, і набуває значення $\omega_n(x) = (-1)^{a+b}$, де a – кількість i таких, що $\varepsilon_{2i} = 1 = c_{2i-2}$, b – кількість j таких, що $\varepsilon_{2j+1} = 1, c_{2j-1} = 0$, $i, j \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2. *Для довільного набору* $(c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}) \in A^{k+1}, n = 2^k + \varepsilon_{k-1}2^{k-1} + \dots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0 2^0$ *для функції* ω_n *має місце рівність:*

$$\int\limits_{x \in \Delta^{-2}_{c_1 c_2 \dots c_{k+1}}} \omega_n(x)dx = 0 = \int\limits_0^1 \omega_n(x)dx.$$

Теорема 3. *Система функцій* $\omega_n(x)$ *є ортогональною, а саме для* $m \neq n$*:*

$$\int\limits_0^1 \omega_n(x)\omega_m(x)dx = 0.$$

Якщо $m = n$*, то*

$$\int\limits_0^1 \omega_n(x)\omega_m(x)dx = 1.$$

В доповіді пропонуються застосування аналогів функцій Радемахера і Уолша та їх властивості.

Література

[1] Працьовитий М.В, Маслова Ю.П. *Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша* // Збірник Праць Інституту математики НАН України — 2016. — Т. 13, № 3. — С. 146–157.

[2] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування.* — Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.

[3] Deb, A., Sen, S. K., Datta, A. K. (1992). Walsh Functions and their Applications: A Review. // IETE Technical Review, 9(3). – p.238–252.