Розмір мінімальних контрольних множин для зображення чисел відрізка [0,1]

О. Я. Виннишин[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

oleh.vynnyshyn@imath.kiev.ua

Нехай $A \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$ – s-символьний алфавіт, $L = A \times A \times \cdots \times A \cdots$ – множина (простір) послідовностей елементів алфавіту, $P = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n\}$ – фіксована множина впорядкованих наборів $\overline{p}_i = \overline{p_{i1}p_{i2}...p_{im_i}}$ елементів алфавіту (множина заборон).

Нехай $K(P)$ – підмножина L, яка містить послідовності $(\alpha_n) \in L$, серед наборів послідовних елементів яких немає елементів множини P, тобто

$$K(P) = \{(\alpha_n) \in L : \ \overline{\alpha_{k+1}...\alpha_{k+m_i}} \neq \overline{p}_i \ \ \forall k \in N, \forall p_i \in P\}.$$

Оскільки сюр'єктивне відображення L в $[0; 1]$ задає кодування [1] (зображення) чисел цього проміжка, то переходом від L до $K(P)$ (шляхом проріджения) отримується клас множин канторівського типу (досконалих ніде не щільних множин) з $[0; 1]$.

Означення 1. Множина (заборон) P називається *контрольною* множиною, якщо $K(P) = \varnothing$.

Лема 1. ***Критерій контрольності множини заборон***. *Для того щоб множина P заборонених наборів довжини n була контрольною, необхідно і достатньо, щоб множина $K(P)$ не містила нескінченних чисто періодичних послідовностей з періодом $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)$, де $k \leq s^n$, s - кількість символів у алфавіті A.*

Лема 2. *Позначимо через a_k кількість впорядкованих наборів довжини k, які не є кратним повтором (конкатенацією) впорядкованого набору меншої довжини. Тоді виконується*

$$a_k = s^k - \sum_{d \ :d|k} a_d, \quad d < k. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для простору послідовностей $L = A \times A \times \cdots \times A \cdots$ мінімальний розмір контрольної множини, що складається з впорядкованих наборів довжини n обчислюється наступним чином:*

$$min(|P|) = \sum_{k \ :k|n} \frac{a_k}{k}, \quad K(P) = \varnothing$$

де a_k обчислюються за формулою (1).

В доповіді пропонується точна оцінка знизу і доводиться існування контрольної множини із заданою в точній оцінці знизу кількістю елементів.

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998, 295.
2. Бродський Я. С. Статистика. Ймовірність. Комбінаторика. — Тернопіль: навчальна книга Богдан, 2017, 544.
3. Сарана О. А., Ясінський В. В. Комбінаторика. Елементи теорії ймовірностей. — Київ: НТУУ КПІ, 2009, 32.