Приховані симетрії та закони збереження і точні розв'язки бездисперсійного рівняння Нижника

О. О. Віннiченко[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

Запропонована в [5] система $w_t = k_1 w_{xxx} + k_2 w_{yyy} + 3(v^1 w)_x + 3(v^2 w)_y$, $v^1_y = k_1 w_x$, $v^2_x = k_2 w_y$, яку зараз називають системою Нижника, була однією з перших інтегровних систем диференціальних рівнянь із більш ніж двома незалежними змінними. Використовуючи масштабування змінних, граничні переходи та введення потенціалів, з неї можна отримати різноманітні споріднені моделі. Однією з них є (дійсне симетричне потенціальне) бездисперсійне рівняння Нижника

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y, \tag{1}$$

класичний симетричний аналіз якого виконано у [1, 7]. Зокрема, за допомогою оригінальної версії алгебраїчного методу з [3] в [1, Theorem 2] обчислено псевдогрупу G точкових симетрій рівняння (1). Серед ліївських підмоделей корозмірності один рівняння (1) у [7] виокремлено підмодель

$$w_{122} + w_{22}w_{222} = 0, \tag{2}$$

названу редукованим рівнянням 1.3. Рівняння (2) не містить параметрів, але за правильного вибору анзаців для редукції воно відповідає як редуковане рівняння всій сім'ї підалгебр $\mathfrak{s}^\rho_{1.3} = \langle P^x(1) + P^y(\rho)\rangle$, які параметризовані довільною ненульовою функцією ρ від t з $\rho \not\equiv 1$ та загалом є G-неекквівалентними. Диференціальна підстановка $w_{22} = h$ понижує порядок рівняння (2) і відображає його в нев'язке рівняння Бюргерса

$$h_1 + hh_2 = 0. \tag{3}$$

Для побудови нових широких сімей точних розв'язків рівняння (1), в [6, Section 7] використано оптимізовану процедуру покрокових ліївських редукцій із залученням прихованих симетрій з [2, Section B], де першим кроком є редукція до рівняння (2).

Теорема 1. *З точністю до G-еквівалентності, множину точних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника* (1)*, які можна побудувати за допомогою двокрокових ліївських редукцій, де перший крок ґрунтується на деякій підалгебрі з сім'ї $\{\mathfrak{s}^\rho_{1.3}\}$, вичерпують розв'язки вигляду*

$$u = \Delta(c_3 z_1 + c_4)\, w\left(\frac{c_1 z_1 + c_2}{c_3 z_1 + c_4}, \frac{z_2 + c_5 z_1}{c_3 z_1 + c_4}\right) + \frac{c_3 z_2^3}{6(c_3 z_1 + c_4)} - \frac{c_4 c_5 z_2^2}{2(c_3 z_1 + c_4)} - \frac{\rho_t}{6\rho} y^3,$$

де $c_1, \dots, c_5$ — довільні сталі з $\Delta = c_1 c_4 - c_2 c_3 = \pm 1$, якщо ρ — довільна ненульова функція від t з $\rho_t \neq 0$, та

$$u = w(z_1, z_2 + c_5 z_1) - \frac{c_5}{2} z_2^2, \quad u = -z_1 w(z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2 + c_5) + \frac{z_2^3}{6 z_1},$$

де c_5 — довільна стала, якщо ρ — довільна стала з $\rho \neq 0, 1$. В обох випадках, $w \equiv 0$ або $w(\cdot,\cdot)$ пробігає розв'язки рівняння (2)*, які отримані в* [6, Section 7]*, а*

$$z_1 = 2\int \frac{\rho^3 - 1}{\rho^3} \mathrm{d}t, \quad z_2 = \frac{y}{\rho} - x.$$

Окрім того, в [6] вичерпно описано узагальнені симетрії, косиметрії, характеристики законів збереження та закони збереження підмоделі (2), що дає відповідні нелокальні та приховані структури для нев'язкого рівняння Бюргерса (3) та бездисперсійного рівняння Нижника (1). Це перше настільки всебічне дослідження локальних симетріє-подібних об'єктів для підмоделі відомої системи диференціальних рівнянь. Повні описи навіть окремих видів цих об'єктів у нетривіальних випадках існують у літературі лише для незначної частини таких систем, не кажучи вже про їхні підмоделі.

В [1, Section 2] показано, що узагальнені симетрії рівняння (2) принаймні до п'ятого порядку з точністю до їх еквівалентності вичерпуються його лієвськими симетріями. Характеристики законів збереження до другого порядку знайдено в [4]. Порівняння цих результатів з теоремами 23 і 26 з [6] показує, що бездисперсійне рівняння Нижника (1) допускає багато нетривіальних прихованих узагальнених симетрій та прихованих законів збереження, пов'язаних з лієвськими редукціями відносно підалгебр з сім'ї $\{\mathfrak{s}^{\rho}_{1.3}\}$.

Гомоморфізм $\bar{\boldsymbol{v}}\colon \Sigma \to \tilde{\Sigma}$ між алгебрами Σ та $\tilde{\Sigma}$ канонічних представників класів еквівалентності узагальнених симетрій рівнянь (2) та (3), який індуковано диференціальною підстановкою $w_{0,2} = h$, не є ні ін'єктивним, ні сюр'єктивним. Тому рівняння (2) має нелокальні симетрії, пов'язані з диференціальною підстановкою $w_{0,2} = h$, але це не так для рівняння (3). Ці нелокальні симетрії рівняння (2) можна розглядати як приховані нелокальні симетрії рівняння (1).

Аналогічні природні індуковані лінійні відображення між відповідними просторами канонічних представників класів еквівалентностей косиметрій та характеристик закону збереження, а також між відповідними просторами законів збереження діють у протилежному напрямку і є ін'єктивними, але не є сюр'єктивними. Тому рівняння (3) допускає нелокальні косиметрії та нелокальні закони збереження, пов'язані з диференціальною підстановкою $w_{0,2} = h$.

Авторка висловлює щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку за визначення напрямку дослідження та постановку задач.

1. Boyko V. M., Popovych R. O. and Vinnichenko O. O. Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2024, 132, 107915, 19 pp., arXiv:2211.09759.
2. Koval S. D., Bihlo A. and Popovych R. O. Extended symmetry analysis of remarkable (1+2)-dimensional Fokker–Planck equation. European J. Appl. Math., 2023, 34, 1067–1098, arXiv:2205.13526.
3. Maltseva D. S. and Popovych R. O. Complete point-symmetry group, Lie reductions and exact solutions of Boiti–Leon–Pempinelli system. Phys. D, 2024, 460, 134081, arXiv:2103.08734.
4. Morozov O. I. and Chang J.-H. The dispersionless Veselov–Novikov equation: symmetries, exact solutions, and conservation laws. Anal. Math. Phys., 2021, 11, 126, 26 pp.
5. Nizhnik L. P. Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method. Soviet Phys. Dokl., 1980, 25, 706–708.
6. Vinnichenko O. O., Boyko V. M. and Popovych R. O. Hidden symmetries, hidden conservation laws and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation, 2025, 44 pp., arXiv:2505.02962.
7. Vinnichenko O. O., Boyko V. M. and Popovych R. O. Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation. Anal. Math. Phys., 2024, 14, 82, 56 pp., arXiv:2308.03744.