Про експоненціальну асимптотику одного класу гомеоморфізмів у точці комплексної площини

М. В. Стефанчук[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

stefanmv43@gmail.com

Нехай Γ — сім'я кривих γ у комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелева функція $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називається *допустимою* для сім'ї кривих Γ, записують $\rho \in adm\,\Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)|dz| \geqslant 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. *p-модулем* сім'ї кривих Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\,dxdy.$$

Для довільних множин E, F і G у $\mathbb{C}$ позначимо через $\Delta(E, F; G)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, що з'єднують E та F у G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ для $a < t < b$.

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Покладемо

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2,$$

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ називається *кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля* у точці $z_0 \in D$, якщо нерівність

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2; f\mathbb{A})) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\,\eta^p(|z - z_0|)\,dxdy$$

виконується для довільного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, та кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1.$$

Припустимо, що

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{S(z_0, r)} Q(z)|dz|$$

є середнім інтегральним значенням функції $Q(z)$ по колу $S(z_0, r)$.

Теорема 1. *Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $f : D \to \mathbb{C}$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці z_0, $p > 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, $\kappa = \kappa(z_0) > 0$ і $\alpha > 0$ виконується наступна умова*

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa\, t^{2p-3} e^{\frac{\alpha}{t}}$$

для м.в. (майже всіх) $t \in (0, r_0)$. Тоді справедлива асимптотична оцінка

$$\limsup_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)|\, e^{\frac{\alpha}{(p-2)|z-z_0|}} \geqslant (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}.$$

Наслідок 1. *Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, та $f : D \to \mathbb{C}$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці z_0, $p > 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, $\kappa = \kappa(z_0) > 0$ і $\alpha > 0$*

$$Q(z) \leqslant \kappa\, |z - z_0|^{2p-3} e^{\frac{\alpha}{|z-z_0|}}$$

для м.в. $z \in B(z_0, r_0)$. Тоді

$$\limsup_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)|\, e^{\frac{\alpha}{(p-2)|z-z_0|}} \geqslant (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}.$$

Наслідок 2. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці $z_0 = 0$ при $p > 2$, $f(0) = 0$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, 1)$, $\kappa > 0$ і $\alpha > 0$ виконується умова*

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa\, t^{2p-3} e^{\frac{\alpha}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді

$$\limsup_{z \to 0} |f(z)| e^{\frac{\alpha}{(p-2)|z|}} \geqslant (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}. \tag{1}$$

Зауваження 1. Оцінка (1) є точною та досягається на відображенні $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$,

$$f = \begin{cases} k_0\, e^{-\frac{\alpha}{(p-2)|z|}} \frac{z}{|z|}, & 0 < |z| < 1, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

де $k_0 = (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}$, $\kappa > 0$, $\alpha > 0$, $p > 2$, що є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці $z_0 = 0$ з функцією $Q(z) = \kappa |z|^{2p-3} e^{\frac{\alpha}{|z|}}$.

Наслідок 3. *Нехай $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці $z_0 = 0$ при $p > 2$, $f(0) = 0$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, 1)$, $\kappa > 0$ і $\alpha > 0$*

$$Q(z) \leqslant \kappa\, |z|^{2p-3} e^{\frac{\alpha}{|z|}}$$

для м.в. $z \in B_{r_0}$. Тоді

$$\limsup_{z \to 0} |f(z)| e^{\frac{\alpha}{(p-2)|z|}} \geqslant (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}.$$

Робота була підтримана бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. Stefanchuk. M. V. On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane. Proceedings of the International Geometry Center, 2024, v. 17, no. 2, 158–170.