Реалізації та зображення $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

М. С. Старий[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

staryimath@gmail.com

У роботі розглядаються реалізації та зображення тривимірної алгебри Лі комплексних 2×2 матриць з нульовим слідом ($\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$), яка визначається комутаційними співвідношеннями

$$[e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_1,e_3]=2e_2.$$

Означення 1. *Реалізацією* алгебри Лі векторними полями на області $M\subset\mathbb{C}^m$ називається гомоморфізм $R\colon A\to \mathrm{Vect}(M)$ у простір векторних полів на M з аналітичними коефіцієнтами.

Означення 2. Нехай Aut — група автоморфізмів нашої алгебри Лі. Дві реалізації $R_1\colon A\to\mathrm{Vect}(M_1)$ та $R_2\colon A\to\mathrm{Vect}(M_2)$ називаються *еквівалентними*, якщо існує $\varphi\in\mathrm{Aut}$ та біголоморфне відображення $f\colon\ M_2\to M_1$ таке, що $R_2(v)=f^*\,R_1(\varphi(v))$ для усіх $v\in A$, де f^* пулбек з $\mathrm{Vect}(M_1)$ в $\mathrm{Vect}(M_2)$.

Метою дослідження є побудова нееквівалентних реалізацій алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ застосовуючи прямий метод [3], метод Широкова [4], метод Блаттнера [1] та виходячи з незвідних скінченовимірних зображень [5]; а також порівняння та аналіз результатів отриманих різними методами.

У даній роботі прямим методом [3] знайдено усі нееквівалентні реалізації комплексної алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, отриманий результат сформульовано у теоремі 1.

Теорема 1. *Існує чотири нееквівалентні реалізації алгебри* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

1. $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3$;
2. $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ (x_1^2+x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2$;
3. $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2$;
4. $\partial_1,\ x_1\partial_1,\ x_1^2\partial_1$.

У випадку поля дійсних чисел аналог теореми 1 (але на одну реалізацію більше) було отримано у (див. [3, с. 18]).

Також побудовано перетворення, що зводять реалізації, які відповідають двом незвідним ваговим зображенням до реалізацій з теореми 1. А саме, аналізуючи матриці Φ_1, Φ_2, Φ_3, що відповідають скінченовимірним незвідним зображенням старшої ваги d, та пов'язуючи їх з реалізаціями базисних елементів за правилом [2]

$$e_1=\sum_{i=2}^{d+1}(i-1)x_{i-1}\partial_i,\quad e_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1}(-d-2+2i)x_i\partial_i,\quad e_3=\sum_{i=1}^{d}(-d+i-1)x_{i+1}\partial_i$$

ми встановили, що випадок $d=1$ відповідає реалізації 3 з теореми 1, а випадок $d=2$ (приєднане зображення) відповідає реалізації 2 з теореми 1.

Крім цього доведено, що реалізацію $e_1=\partial_1$, $e_2=x_1\partial_1$, $e_3=x_1^2\partial_1$ (випадок 4 з теореми 1) не можна подати у вигляді реалізації з лінійними однорідними коефіцієнтами. Очевидно, що дану реалізацію неможливо лінеаризувати невиродженими перетвореннями базисних елементів. Отже досить показати, що жодна невироджена заміна координат не зводить дану реалізацію до лінійної.

Припустимо, що існує заміна з ненульовим Якобіаном

$$\tilde{x}_1 = f_1(x_1),\ \tilde{x}_2 = f_2(x_1), \dots, \tilde{x}_m = f_m(x_1), \qquad J(f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_m(x_1)) \neq 0,$$

яка одночасно зводить другий та третій оператори до вигляду

$$\tilde{e}_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{1i} f_i \partial_{\tilde{x}_1} + \dots + \sum_{i=1}^{m} a_{mi} f_i \partial_{\tilde{x}_m}, \qquad \tilde{e}_3 = \sum_{i=1}^{m} b_{1i} f_i \partial_{\tilde{x}_1} + \dots + \sum_{i=1}^{m} b_{mi} f_i \partial_{\tilde{x}_m},$$

де a_{ij}, b_{ij}, $i, j = 1 \dots m$ — комплексні числа.

Тоді, склавши для кожного з операторів систему диференціальних рівнянь в частинних похідних та використавши умову $\tilde{e}_3 = x_1 \tilde{e}_2$, отримуємо систему функціональних (не диференціальних) рівнянь, яка є лінійною та однорідною відносно $f_1, \dots, f_m$, що порушує умову $J(f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_m(x_1)) \neq 0$.

Залишається відкритим питання про можливість отримати реалізацію 1 з теореми 1, виходячи з незвідних зображень, це є об'єктом поточних досліджень.

1. Blattner R. Induced and produced representations of Lie algebras. Trans. Am. Math. Soc., 1969, 144, 457–474.
2. Chapovskyi Y., Efimov D., Petravchuk A. Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients. Proc. Int. Geom. Cent., 2021, 14, No. 4, 257 – 270.
3. Popovych R. O., Boyko V. M., Nesterenko M. O., Lutfullin M. W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras. J. Phys. A: Math. Gen., 2003, 36, 7337 – 7360.
4. Magazev A. A., Mikheyev V. V., Shirokov I. V. Computation of Composition Functions and Invariant Vector Fields in Terms of Structure Constants of Associated Lie Algebras. SIGMA, 2015, 11, 066, 17 pages.
5. Mazorchuk V. Lectures on $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-modules. — London, 2010, 263 p.