Одна неперервна ніде не монотонна функція

С. П. Ратушняк[1]

[1]Інститут математики НАН України, УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

ratush404@gmail.com

Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x=\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_1 g_{[1-\beta_1]1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_k g_{[1-\beta_k]k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\beta_j j}\right) = \Delta^{Q^*_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

де

$$\alpha_n\in N\cup\{0\},\ \beta_1=\begin{cases}0, & \text{якщо } \alpha_1=0,\\ 1, & \text{якщо } \alpha_1\neq 0,\end{cases}\quad \beta_{n+1}=\begin{cases}\beta_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1}=\alpha_n,\\ 1-\beta_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1}\neq\alpha_n.\end{cases}\quad \forall n\in N,$$

$g_{0k}\in(0;1)$, $g_{1k}=1-g_{0k}$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\limits_{i\in\{0,1\}}\{g_{ik}\}=0$, а

$$x=\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}=\delta_{\alpha_1 1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j j}\right), \delta_{\alpha_k k}=\sum_{i=0}^{\alpha_k-1}q_{ik}, k\in N, \tag{1}$$

$Q^*_\infty=||q_{ik}||$ – матриця, для якої виконуються умови:

1) $||q_{ik}||$ містить нескінченну кількість рядків і стовпців;
2) $\sum\limits_{i=0}^{\infty}q_{ik}=1$, причому $q_{ik}>0$ $\forall i\in N\cup\{0\}$, $\forall k\in N$;
3) $\prod\limits_{k=1}^{\infty}q_{\alpha_k k}=0$ $\forall\alpha_k\in N\cup\{0\}$,

Розклад числа x в ряд (1) називається Q^*_∞-*представлення* числа x, а скорочений запис $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – його Q^*_∞-*зображенням* [1].

Множина $\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел виду $x=\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_1\alpha_2\ldots}$, де $\alpha_n\in N\cup\{0\}$, називаються *циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$*. Означення циліндра для Q^*_2-зображення чисел аналогічне.

Теорема 1. *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією на $[0;1)$.*

Лема 1. *Довільний циліндр $\Delta^{Q^*_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$, окрім $\Delta^{Q^*_2}_{00\ldots0}$, має зліченну кількість циліндрів прообразів. Циліндр $\Delta^{Q^*_2}_{00\ldots0}$ має лише один прообраз $\Delta^{Q^*_\infty}_{00\ldots0}$. Функція f має скінченні, зліченні та континуальні множини рівнів.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, фрактальних та диференціальних властивостей функції f.

Робота була підтримана грантом Simons Foundation (1290607, S.R.).

1. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних роподілів, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998 – 296 с.