# Оптимальні градієнтні потоки корозмірності один на замкнених поверхнях

**О. О. Пришляк**[1]**, І. А. Овцинов**[2]

[1]КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

[2]КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

*prishlyak@knu.ua, iliaovtsynov@knu.ua*

Дана доповідь присвячена проблематиці застосування так званих хордових діаграм для вивчення топологічної еквівалентності оптимальних градієнтних потоків корозмірності 1 на замкнених зв'язних поверхнях. Стисло кажучи, потоки корозмірності 1 — це потоки, породжені векторними полями, які не є векторними полями Морса–Смейла і можуть зустрічатися в однопараметричних $C^k$-родинах векторних полів на замкнених поверхнях. У своїй статті [1] науковці Дж. Паліс і Ф. Такенс довели, що такі потоки поділяються на 2 типи — SN-потоки, в яких з'являється сідло-вузол, і SC-потоки, в яких з'являється сідлова зв'язка, тобто траєкторія, що тече з одного сідла в інше.

**Означення 1.** *Оптимальним SN-потоком (SC-потоком)* на замкненій зв'язній поверхні у даній роботі називається такий SN-потік (SC-потік), який має серед усіх SN-потоків (SC-потоків) на цій поверхні найменше число особливих точок.

**Теорема 1.** *SN-потік (SC-потік) на замкненій зв'язній поверхні є оптимальним тоді й лише тоді, коли він має лише одне джерело й один стік.*

Хордові діаграми — це специфічний граф, що виступає повним топологічним інваріантом досліджуваних оптимальних потоків. Раніше ці діаграми вже були застосовані для вивчення потоків Морса на замкнених зв'язних поверхнях в статті [2]. Особливістю таких структур є їхня дискретність — їх зручно описувати за допомогою скінченних наборів цифр (кодів), а відтак і вивчати такі потоки з використанням обчислювальної техніки.

Загалом, хордова діаграма — це межа досить малого околу джерела потоку, об'єднана зі стійкими многовидами всіх сідлових точок на поверхні. Використовуючи різні властивості поверхонь і динамічних систем на них, зокрема рід, ейлерову характеристику поверхні та теорему Пуанкаре–Гопфа, досить часто можна перерахувати всі оптимальні градієнтні потоки корозмірності 1 на таких поверхнях.

Хордові діаграми мають цикли — специфічні шляхи обходу межі відповідного кола та його хорд з обох боків. При цьому враховується, чи зберігає стійкий многовид сідла, яку представляє хорда в діаграмі, орієнтацію на поверхні. Оптимальним потокам відповідають одноциклічні діаграми.

Хордові діаграми для SN-потоків називаються C-діаграмами, оскільки в них позначається дуга на колі, що відображає підмножину межі досліджуваного околу джерела, який перетинається з нестійкими многовидами сідло-вузла, якщо вузлом є джерело, і стійкими многовидами сідло-вузла, якщо вузлом є стік. Кінці дуги на колі не перетинаються з кінцями хорд.

**Теорема 2.** *Для кожної одноциклічної C-діаграми існує SN-потік на деякій замкненій зв'язній поверхні, що відповідає цій діаграмі.*

**Теорема 3.** *Два оптимальні SN-потоки на замкнених зв'язних поверхнях є топологічно еквівалентними тоді й лише тоді, коли вони мають однаковий тип сідло-вузла, а також існує ізоморфізм між їхніми C-діаграмами, що зберігає марковані дуги.*

Оскільки в хордових діаграмах для SC-потоків з'являється своєрідний T-граф з трьома вершинами на колі, то такі діаграми називають T-діаграмами. Кінці T-графа на колі не перетинаються з кінцями хорд.

**Теорема 4.** *Для кожної одноциклічної T-діаграми існує SC-потік на деякій замкненій зв'язній поверхні, що відповідає цій діаграмі.*

**Теорема 5.** *Два оптимальні SC-потоки на замкнених зв'язних поверхнях є топологічно еквівалентними тоді й лише тоді, коли існує ізоморфізм між їхніми T-діаграмами.*

Утвореним діаграмам присвоюються коди, за якими можна легко відтворити саму діаграму, а відтак реалізувати і сам потік, і поверхню (з точністю до роду й орієнтованості), на якій він визначений. Зокрема, виконується наступна теорема.

**Теорема 6.** *Два оптимальні SN-потоки (SC-потоки) на замкнених зв'язних поверхнях є топологічно еквівалентними тоді й лише тоді, коли їхні хордові діаграми мають однакові або симетричні коди.*

1. J. Palis and F. Takens, *Stability of parametrized families of gradient vector fields*, Annals of Mathematics, Second Series, **118** (1983), no. 3, 383–421.
2. Zlata Kibalko, Alexandr Prishlyak, and Roman Shchurko. Trajectory equivalence of optimal Morse flows on closed surfaces. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 11(1):12–26, 2018.