Одна ніде не мотононна функція, означена в термінах ланцюгового зображення чисел

О. О. Нікорак[1], **С. П. Ратушняк**[1,2]

[1]Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

[2]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

23fmif.o.nikorak@std.udu.edu.ua, ratush404@gmail.com

Нехай $A_s \equiv \{e_0, e_1, ..., e_{s-1}\}$ — алфавіт, $(0 < e_0 < e_1 < ... < e_{s-1})$. Тоді ланцюговим A_s-дробом називається вираз виду

$$1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n + ... \equiv [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]^{A_s}, (a_n) \in L_s.$$

Для того щоб множина E значень усіх ланцюгових A_s-дробів була відрізком, а система кодування чисел A_s-дробами мала нульову надлишковість елементи алфавіту мають задовольняти умови теореми [2]. Наведемо її.

Теорема 1. *Для множини E мають місце рівності $\min\limits_{a_n \in A_s}\{E\} = [0; (e_{s-1}, e_0)] \equiv d_0$, $\max\limits_{a_n \in A_s}\{E\} = [0; (e_0, e_{s-1})] \equiv d_1$. Якщо $e_i = e_{i-1} + d$, $i = \overline{1, s-1}$, де $d = d_1 - d_0$, то для довільного $x \in [d_0, d_1]$ існує послідовність $a_n \in A_s$, така що $x = [0; a_1, ..., a_n, ...]^{A_s}$.*

Запис $[0; a_1, ..., a_n, ...]^{A_s}$ називається ланцюговим A_s-зображенням числа x. Ввівши перекодування $\alpha_n = e_{\alpha_n}$, де $\alpha_n \in \{0, 1, ..., s-1\}$, ми отримаємо ланцюгове A_s-зображення $\Delta^{A_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ засобами класичного алфавіту $\{0, 1, 2, ..., s-1\}$.

Нехай $A_5 = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $A_3 = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2\}$ — алфавіти, для елементів яких має місце теорема 1. Розглядається функція $[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]^{A_5} \xrightarrow{f} [0; b_1, b_2, ..., b_n, ...]^{A_3}$, яка в термінах перекодованих ланцюгових зображень означується рівностями:

$$f(x = \Delta^{A_5}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{A_3}_{\beta_1\beta_2...\beta_n...},\ a_n = e_{\alpha_n}, b_n = \tau_{\beta_n},\ \text{де}$$

$$\beta_n = \begin{cases} |c_n - \alpha_n|, & \text{якщо } \alpha_n \in \{0,1\}, \\ |c_n - \left[\frac{\alpha_n}{2}\right]|, & \text{якщо } \alpha_n \in \{2,3,4\}, \end{cases}, c_1 = 0,\ c_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} = c_n, & \text{якщо } \alpha_n \neq 2 \\ c_{n+1} = 2 - c_n, & \text{якщо } \alpha_n = 2, \end{cases}$$

$\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta_n \in \{0, 1, 2\}$, $n \in N$.

Теорема 2. *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації. Графік Γ_f функції f є автомодельною множиною зі структурою автомодельності: $\Gamma_f = \bigcup\limits_{n=0}^{4} \Gamma_n = \bigcup\limits_{n=0}^{4} g_n(\Gamma_f)$, де g_n — перетворення площини:*

$$g_{\alpha_1} : \begin{cases} x' = \frac{1}{x} - e_{\alpha_1(x)}, \\ y' = \frac{1}{y} - \tau_{\beta_1(y)}, \end{cases} \quad \alpha_1 \in \{0, 1, 3, 4\}, \quad g_2 : \begin{cases} x' = \frac{1}{x} - e_{\alpha_1(x)}, \\ y' = \frac{1}{I(y)} - \tau_{\beta_1(I(y))}, \end{cases}$$

I – інверсор A_3-зображення чисел: $I([0; b_1, ..., b_n, ...]^{A_3}) = [0; \tau_0 + \tau_2 - b_1, ..., \tau_0 + \tau_2 - b_n, ...]^{A_3}$.

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних, структурних та варіаційних властивостей функції f, що є аналогом узагальнення функції Серпінського.

1. Ratushniak S., Pratsiovytyi P. Infinite continued fractions with a bounded set of elements and their applications. Inspirations in Real Analysis II (Bedlewo, Poland, April 14–19, 2024): Book of Abstracts. — Lodz : Lodz Univ. Technol. Press, 2024.