Фрактальні властивості квазіінверсорів s-кового зображення чисел

В. В. Назарчук[1], **М. В. Працьовитий**[1,2]
[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна
[2]Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua, prats4444@gmail.com

Нехай $A_s = \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ – s-ковий алфавіт, $s > 2$, $L = A_s \times A_s \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавітів. Тоді для довільного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$. Розклад числа x в s-ковий ряд називається *s-ковим представленням*, а запис $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ – його *s-ковим зображенням.*

Існує зліченна множина чисел (*s-ково бінарних*), що мають два різні s-кові зображення: $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)} = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...[\alpha_n-1](s-1)}$. Решта чисел відрізка (*s-ково унарні*) мають єдине s-кове зображення.

Розглядається функція f_a, означена рівністю

$$f_a(x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^s_{|a_1-\alpha_1||a_2-\alpha_2|...|a_n-\alpha_n|...}, \tag{1}$$

де a_n – s-кові цифри параметра $a = \Delta^s_{a_1a_2...a_n...}$, $(a_n) \in L$.

Для коректності означення функції f_a, домовимось використовувати лише одне з двох зображень, а саме те, що містить період (0).

Теорема 1. *Якщо $a = \Delta^s_{(a_1a_2...a_n)}$, то графік функції f_a є самоподібною множиною*

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_{s^n} = \bigcup_{(\alpha_1,...,\alpha_n)\in A_s^n} g_{\alpha_1...\alpha_n}(\Gamma), \text{ де}$$

$$g_{\alpha_1...\alpha_n} : \begin{cases} x' = \frac{x}{s^n} + \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m}{s^m}, \\ y' = \frac{y}{s^n} + \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{|a_m-\alpha_m|}{s^m}. \end{cases}$$

Наслідок 1. *Якщо $a = \Delta^s_{(a_1a_2...a_n)}$, то самоподібна розмірність графіка функції f_a дорівнює* 1.

Теорема 2. *Якщо $a = \Delta^s_{(a_1a_2...a_n)}$, то для функції f_a має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f_a(x)dx = \frac{\sum\limits_{(\alpha_1,...,\alpha_n)} \left(\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{|a_m-\alpha_m|}{s^m} \right)}{s^n - 1}.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, тополого-метричних та фрактальних властивостей функції f_a.

Робота була підтримана грантом Simons Foundation (1290607, V.N.).

1. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних роподілів, Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998 – 296с.