Квазі-обернений ланцюговий дріб типу Тіле

Ю. М. Мисло[1]

[1]ДВНЗ "УжНУ Ужгород, Україна

julia.pah@gmail.com

Розглядається задача визначення коефіцієнтів квазі–оберненого ланцюгового дробу типу Тіле (Т–КЛД), який відповідний [1] степеневому ряду $c_0 + \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i (z-z_0)^i$:

$$T_n(z) = \left(b_0 + \frac{z-z_0}{b_1} + \frac{z-z_0}{b_2} + \cdots + \frac{z-z_0}{b_n} \right)^{-1}. \tag{1}$$

Аналогічно, як в [3] доводиться наступна теорема

Теорема 1 (2). *Якщо в точці $z_0 \in \mathcal{Z}$ похідні $w_k = f^{(k)}(z_0) \neq 0, k = \overline{0,n}$, тоді ненульові коефіцієнти Т–КЛД (1) обчислюються за рекурентними формулами*

$$b_0 = \frac{1}{w_0}, \quad b_1 = \frac{-1}{b_0^2 w_1}, \quad b_2 = \frac{1}{b_0^2 b_1^2 \frac{w_2}{2!} - \frac{1}{b_0}}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} b_k = 1 \Big/ \prod_{j=1}^{k-1} b_j^2 \Big(& \frac{(-1)^{k-1} w_k}{k!} - \Big(\frac{1}{b_1^3 b_2^2} \sum_{i_3=1}^{2} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=1}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \\ & \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3} \sum_{i_3=1}^{2} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=1}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \\ & \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \frac{1}{b_4 \prod\limits_{j=1}^{3} b_j^2} \sum_{i_4=1}^{3} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \sum_{i_5=1}^{i_4+1} \frac{1}{b_{i_5} b_{i_5+1}} \cdots \\ & \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \cdots + \frac{1}{b_{k-1} \prod\limits_{j=1}^{k-2} b_j^2} \sum_{i_{k-1}=1}^{k-2} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} \Big) \Big), \end{aligned} \tag{6}$$

коли $k = \overline{3,n}$.

Формули визначення коефіцієнтів Т–КЛД не передбачають обчислення обернених похідних 2–го типу або визначників Ганкеля. Розвинення функції в ланцюговий дріб Тіле, Т–КЛД чи дріб іншого вигляду як правило має більш широку область збіжності, ніж розвинення в степеневий ряд, а тому розвинення в ланцюгові дроби виступають аналітичним продовженням розвинення функції в степеневий ряд. Алгоритми обчислення значення ланцюгових дробів більш стійкі до обчислювальних похибок заокруглення.

1. Cuyt A. and Brevik Petersen V. and Verdonk B. and Waadeland H. and W. B. Jones W. B. Handbooks of continued cractions for special functions. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2008.
2. Myslo Yu. The corresponding quasi-inverse chain fraction of Thiele type. Proceedings of the International Geometry Center, 2024, 17(2), 171-189.
3. Pahirya M. and Myslo Yu. A certain method of construction of Thiele–Hermite continued fraction at a point. Proceedings of the International Geometry Center, 2023, 16, 3–4, 244–261, doi= 10.15673/pigc.v16i3.2646.