Критерії збіжності числових послідовностей в термінах розкладів Перрона

М. П. Мороз
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
moroznik22@gmail.com

Розкладами Перрона [2,4] числа $x \in (0,1]$ називають його розклади в ряди виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_n}{(p_1-1)p_1 \cdots (p_n-1)p_n p_{n+1}}, \quad r_n, p_n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r_0 \cdots r_n}{(q_1-1)q_1 \cdots (q_n-1)q_n (q_{n+1}-1)}, \quad r_n, q_n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $p_n \geq r_{n-1}+1$ та $q_n \geq r_{n-1}+1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Ряд (1) називають додатним розкладом Перрона, а ряд (2) — знакозмінним.

Зафіксуємо послідовність P функцій φ_n таких, що $\varphi_0 = \mathrm{const}$ та $\varphi_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}$. Якщо $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(p_1, \ldots, p_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то розклад (1) називають *P-представленням* числа x та позначають $\Delta^P_{p_1 p_2 \ldots}$. Якщо $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(q_1, \ldots, q_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то розклад (2) називають *P^--представленням* числа x та позначають $\Delta^{P^-}_{q_1 q_2 \ldots}$.

Відомо [2,4], що для довільної послідовності функцій $P = (\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ кожне число $x \in (0,1]$ має єдине P-представлення та не більше одного P^--представлення, а множина чисел з $(0,1]$, що не мають свого P^--представлення, є зліченною.

Якщо $x = \Delta^P_{p_1 p_2 \ldots}$, то $p_n = p_n(x)$ називають *n-ною P-цифрою* числа x. Множину $\Delta^P_{c_1 \ldots c_k}$ всіх $x \in (0,1]$, у яких $p_1(x) = c_1, \ldots, p_k(x) = c_k$, називають *$P$-циліндром* рангу k з основою $c_1 \ldots c_k$. Аналогічно вводять поняття *n-ної P^--цифри* $q_n = q_n(x)$ та *P^--циліндра* $\Delta^{P^-}_{c_1 \ldots c_k}$.

При дослідженні функцій, що визначені в термінах розкладів Перрона, виникає потреба в критеріях збіжності числових послідовностей, що сформульовані в термінах цих розкладів. Деякі з умов неявно виникали при дослідженні функцій, що визначені в термінах розкладів Енгеля [3], Остроградського–Серпінського–Пірса [1] тощо.

В даній доповіді ми наводимо повний список необхідних та достатніх умов збіжності числових послідовностей, що визначені в термінах P-представлень та P^--представлень.

Збіжність числових послідовностей в термінах P-представлень.

Нехай $x_0 = \Delta^P_{c_1 c_2 \ldots}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел з $(0,1] \setminus \{x_0\}$, k_n — найменше натуральне число таке, що $p_{k_n}(x_n) \neq p_{k_n}(x_0)$.

Теорема 1. *Якщо x_0 не є точною межею жодного P-циліндра, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff \lim_{n\to\infty} k_n = \infty.$$

Теорема 2. *Якщо $x_0 \in (0,1]$ — супремум деякого P-циліндра, а послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $0 < x_n < x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff \lim_{n\to\infty} k_n = \infty.$$

Теорема 3. *Якщо $x_0 = \inf \Delta^P_{c_1 \ldots c_k}$, а послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $x_0 < x_n \leq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ тоді і тільки тоді, коли існує n_0 таке, що*

$$\begin{cases} p_i(x_n) = c_i \text{ для всіх } i \leq k \text{ та } n \geq n_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{k+1}(x_n) = \infty. \end{cases}$$

Теорема 4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} p_1(x_n) = \infty.$

Збіжність числових послідовностей в термінах P^--представлень.

Множина чисел з $(0,1]$, що не мають свого P^--представлення, рівна множині точних меж P^--циліндрів. Її позначають IS^{P^-}.

Нехай $x_0 = \Delta^{P^-}_{c_1c_2\ldots} \in (0,1) \setminus IS^{P^-}$, $(x_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність чисел з $(0,1) \setminus \Big(IS^{P^-} \cup \{x_0\} \Big)$, а k_n — найменше натуральне число таке, що $q_{k_n}(x_n) \neq q_{k_n}(x_0)$.

Теорема 5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty.$

Теорема 6. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} q_1(x_n) = \infty.$

Оскільки кожен елемент з IS^{P^-} є супремумом деякого P^--циліндра непарного рангу, то наступна теорема повністю описує послідовності, що збіжні до чисел з IS^{P^-} зліва.

Теорема 7. *Якщо $x_0 = \sup \Delta^{P^-}_{c_1\ldots c_k}$, де k є непарним, а послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ така, що $0 < x_n < x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ тоді і тільки тоді, коли існує n_0 таке, що*

$$\begin{cases} q_i(x_n) = c_i \text{ для всіх } i \leq k \text{ та } n \geq n_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} q_{k+1}(x_n) = \infty. \end{cases}$$

Оскільки кожен елемент з $IS^{P^-} \setminus \{1\}$ є інфімумом деякого P^--циліндра парного рангу, то наступна теорема повністю описує послідовності, що збіжні до чисел з $IS^{P^-} \setminus \{1\}$ справа.

Теорема 8. *Якщо $x_0 = \inf \Delta^{P^-}_{c_1\ldots c_k}$, де k є парним, а послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ така, що $x_0 < x_n < 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ тоді і тільки тоді, коли існує n_0 таке, що*

$$\begin{cases} q_i(x_n) = c_i \text{ для всіх } i \leq k \text{ та } n \geq n_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} q_{k+1}(x_n) = \infty. \end{cases}$$

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1290607, M.M.).

1. Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. — Київ: Наукова Думка, 2013, 288 с.
2. Мороз М. П. Зображення дійсних чисел рядами Перрона, їхня геометрія та деякі застосування. Нелінійні коливання, 2023, 26, № 2, 247 – 260.
3. Baranovskyi O., Pratsiovytyi M. One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series. Funct. Approx. Comment. Math., 2023, 68, No. 2, 143 – 162.
4. Moroz M. Representations of real numbers by alternating Perron series and their geometry. Expositiones Mathematicae, 2025, 43, No. 1, 125635.
5. Moroz M. The convergence of sequences in terms of positive and alternating Perron expansions. Preprint at https://arxiv.org/abs/2410.041, 2024, 10 p.