

НОРМАЛЬНІ ФОРМИ ФУНКЦІЙ МОРСА-БОТТА БЕЗ СІДЕЛ НА ПОВЕРХНЯХ

Б. Г. Фещенко¹

¹Інститут математики НАН України, Київ, Україна

fb@imath.kiev.ua

Нехай M – гладка компактна та орієнтовна поверхня, а через P позначимо $\mathbb{R}$ або S^1 . Нехай також $\mathcal{F}^0(M, P)$ – клас функцій Морса-Ботта на M зі значеннями у P без сідлових точок. Тоді відомо, що M є дифеоморфною до однієї з чотирьох поверхонь: циліндр $S^1 \times [0, 1]$, диск D^2 , сфера S^2 або тор T^2 . Прості приклади функцій з класу $\mathcal{F}^0(M, P)$ можна просто привести:

Приклад 1. Нехай $f_0 : M_0 \rightarrow P$ – гладка функція з $\mathcal{F}^0(M, P)$

(1₀) $M_0 = S^1 \times [0, 1] = \{(z, s) \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1, 0 \leq s \leq 1\}$ – одиничний циліндр і $f_0 : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ задана $f_0(z, s) = s$,

(2₀) $M_0 = D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ – одиничний диск, $f_0 : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулою $f_0(x, y) = x^2 + y^2$,

(3₀) $M_0 = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ – одинична сфера і $f_0(x, y, z) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задана так: $f_0(x, y, z) = z$,

(4₀) $M_0 = T^2 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1\}$ – одиничний тор, а $f_0 : T^2 \rightarrow S^1$ задана формулою $f_0(w, z) = z$.

Ці чотири функції не мають критичних кіл. Ми будемо називати їх *елементарними*.

Теорема 1. Функція $f \in \mathcal{F}^0(M, P)$ допускає розклад

$$f = \varkappa \circ f_0 \circ h^{-1} \tag{1}$$

де $h : M_0 \rightarrow M$ – дифеоморфізм, $f_0 \in \mathcal{F}^0(M_0, P)$ – елементарна функція на M_0 (див. Приклад 1), а гладка функція $\varkappa : f_0(M_0) \rightarrow P$ задовольняє такі умови:

(1) $\varkappa$ має тільки скінченне число невироджених локальних екстремумів,

(2) $\varkappa$ не має критичних точок на $f_0(\Sigma_{f_0})$ і $f_0(\partial M_0)$, де Σ_{f_0} – множина критичних точок функції f_0 .

Розклад (1) ми називаємо *нормальною формою* для f . Він не є єдиним і залежить від вибору h . Деталі можна знайти в [1].

1. Bohdan Feshchenko. Normal forms of functions with degenerate singularities on surfaces equipped with semi-free circle actions. arXiv:2412.18944, 18 p., 2024