Про добутки конформних радіусів областей відносно точок деякої прямої

І. В. Денега[1], **Я. В. Заболотний**[2]
[1,2] Інститут математики НАН України, Київ, Україна
iradenega@gmail.com, yaroslavzabolotnii@gmail.com

Задачі про екстремальне розбиття займають значне місце в геометричній теорії функцій і мають багату історію (див., напр., [1 – 11]). Вперше екстремальні розбиття розглядалися при отриманні оцінок добутку степенів конформних радіусів неперетинних областей. Цей напрямок, пов'язаний із екстремальними задачами на класах голоморфних відображень, отримав особливо помітний розвиток завдяки працям П. Кьобе, Л. Бібербаха, Т. Гронуолла, М. Шиффера, М.О. Лаврентьєва, Г. Ґрьотша, О. Тейхмюллера, Г.М. Голузіна, Дж.А. Дженкінса та багатьох інших математиків.

Нехай $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ – відкритий одиничний круг. Нехай функція $f(z)$, регулярна в крузі U, однолисто відображає даний круг на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$ і $a \neq \infty$. Величина $|f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a.

Якщо $a = \infty$, то існує єдина функція $f(z)$, регулярна в області B, за винятком точки a, яка в околі даної точки розкладається в ряд Лорана вигляду

$$f(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + \dots$$

і яка однолисто відображає дану область на область $w > R$. Величина $\frac{1}{R}$ називається конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Означення конформного радіуса в нескінченно віддаленій точці a можна також сформулювати наступним чином: нехай функція $f(z)$, регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, однолисто відображає дану область на деяку область B так, що $f(\infty) = \infty$. Величину $|f'(\infty)|^{-1}$ називають конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

У даній роботі ми доводимо нові теореми для сімейств $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ регулярних в крузі $|z| < 1$ функцій f_k, які попарно не приймають в цьому крузі однакових значень. Ця тематика добре відома фахівцям, які застосовують різні методи теорії функцій (див., напр., [1 – 6]). Практично кожна задача про екстремальне розбиття дає певний результат у цій галузі. Ми розглядаємо функції з фіксованими значеннями $f_k(0)$ на деякій прямій і доводимо оцінки похідних модулів більш ніж у двох точках.

Теорема 1. [4] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, – деяке натуральне число; $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, – деякий набір фіксованих точок прямої $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$; f_k, $k = \overline{1,n}$, – функції, регулярні і однолисті в крузі $|z| < 1$, відображають цей круг на взаємно неперетинні області так, що $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, та довільних різних $z_1, z_2 \in U$. Тоді правильна наступна нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)| \leqslant (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leqslant p < k \leqslant n} |f_p(0) - f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Теорема 2. [4] *Нехай $n \in \mathbb{N}$ – деяке натуральне число; $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, – деякий набір фіксованих точок прямої $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$; f_k, $k = \overline{0,n}$, – функції, регулярні і однолисті в крузі U і попарно не приймають в ньому однакових значень $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $0 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$, та довільних різних $z_1, z_2 \in U$ для яких $f_k(0) = a_k$, $f_0(0) = 0$. Тоді справедлива нерівність*

$$\prod_{k=0}^{n} |f_k'(0)| \leqslant \frac{(n-1)^{-\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\prod_{1 \leqslant p < k \leqslant n} |f_p(0) - f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Теорема 3. [4] *Нехай $n \in \mathbb{N}$ – деяке натуральне число; $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, – деякий набір фіксованих точок прямої $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$; f_k, $k = \overline{0,n}$, – функції, конформно і однолисто відображають одиничний круг U на попарно неперетинні області так, що $f_k(0) = a_k$, $f_{n+1}(0) = \infty$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leqslant i,j \leqslant n+1$, $i \neq j$, та довільних різних $z_1, z_2 \in U$. Тоді справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n+1} |f_k'(0)| \leqslant n^{-\frac{1}{2}} (n-1)^{-\frac{n-1}{4}} \left(\prod_{1 \leqslant p < k \leqslant n} |f_p(0) - f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (1290607, I.V.D.,Y.V.Z.) and by budget program "Support for the development of priority areas of research" (KPKVK 6541230).

1. Jenkins J. A. Univalent functions and conformal mappings. — Berlin: Springer, 1962.
2. Goluzin G. M. Geometric theory of functions of a complex variable. — USA: Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.
3. Duren P. Univalent Functions. — Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1983.
4. Hayman W.K. Multivalent functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
5. Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе. —Київ: Праці Ін-ту мат-ки НАН Укр., 2008.
6. Dubinin V. N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. — Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
7. Bakhtin A. K., Denega I. V. Generalized M.A. Lavrentiev's inequality. J. Math. Sci., 2022, 262, No. 2, 138 – 153.
8. Denega I. V., Zabolotnyi Y. V. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. Matematychni Studii, 2023, 60, No. 2, 138 – 144.
9. Denega I., Zabolotnyi Y. Some extremal problems on the Riemannian sphere. Carpathian Math. Publ., 2024, 16, No. 2, 593 – 605.
10. Denega I., Zabolotnyi Y. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line. J. Math. Sci., 2024, 284, No. 3, 299 – 314.
11. Zabolotnyi Y., Denega I. On products of inner radii of non-overlapping domains containing certain segment points. Complex Variables and Elliptic Equations, https://doi.org/10.1080/17476933.2024.2416413