

МНОЖИНИ ЕЛЕМЕНТІВ ТА МНОЖИНИ ЗНАЧЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

І. Б. Біланик¹

¹Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
Тернопіль, Україна
i.bilanyk@ukr.net

Об'єктом дослідження є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad (1)$$

де $a_{i(k)}, b_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} = \{i(k) : i(k) = (i_1, i_2, \dots, i_k); 1 \leq i_p \leq i_{p-1} \leq \dots \leq i_0; k = 1, 2, \dots; i_0 = N\}$, де N — фіксоване натуральне число.

Важливу роль у дослідженні гіллястих ланцюгових дробів відіграє питання про умови збіжності. При формулюванні відповідних результатів доволі часто використовують множини елементів та множини значень гіллястих ланцюгових дробів.

Послідовність $\{V_{i(k)}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, непорожніх множин $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ називається послідовністю множин значень ГЛД (1), якщо

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)}, \quad i(k) \in \mathcal{I}.$$

Для заданої послідовності множин значень $\{V_{i(k)}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, де $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, послідовністю множин елементів ГЛД (1), що їй відповідає, називається послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}$, елементи якої визначаються співвідношеннями

$$\Omega_{i(k)} := \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 : a \left(b + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)} \right)^{-1} \subseteq V_{i(k)} \right\}, \quad i(k) \in \mathcal{I}.$$

У теорії неперервних дробів описано також інший підхід, коли відповідна послідовність множин елементів індукує відповідну послідовність множин значень неперервного дробу.

У випадку існування найменшої за включенням послідовності множин значень, індукованої послідовністю елементів, така послідовність називається найкращою послідовністю множин значень, і вона відіграє ключову роль у теоретичному обґрунтуванні збіжності дробів.

Для ГЛД спеціального вигляду часто розглядають параболічні, кутові, кругові множини елементів та відповідні їм множини значень. Якщо із належності елементів до відповідної множини значень впливає збіжність цього дробу, то множина елементів називається множиною збіжності дробу. Якщо ж для збіжності дробу необхідно накладати додаткові обмеження на елементи дробу, то ці множини стають множинами умовної збіжності. Встановлено, що це необхідно у випадку необмежених множин елементів.

1. Боднар Д. І. Гіллясті ланцюгові дроби. — К. : Наук. Думка, 1986, 176 с.
2. Jones W. B., Thron W. J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. — London; Amsterdam; Don Mills; Ontario; Sydney; Tokyo: Addison-Wesley Pub. Co., Inc, 1980, 428 p.