Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень

Я. В. Заболотний

Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна

yaroslavzabolotnii@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ — додатна дійсна піввісь, $U = \{z\colon |z| < 1\}$ — відкритий одиничний круг.

Нехай функція $f(z)$, регулярна в крузі U, однолисто відображає даний круг на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$ і $a \neq \infty$.

Означення 1. Величина $|f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a.

Означення 2. Нехай функція $f(z)$, регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, однолисто відображає дану область на деяку область B так, що $f(\infty) = \infty$. Величину $|f'(\infty)|$ називають конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Нами вивчається наступна задача, вперше сформульована в роботі [1]:

Задача 1. Нехай n — деяке натуральне число, $n \geqslant 3$; a_k, $k = \overline{1,n}$ — деякий набір точок комплексної площини; γ_k, $k = \overline{1,n}$ — деякі додатні дійсні числа. Знайти максимум наступного добутку:

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|^{\gamma_k}, \tag{1}$$

де f_k, $k = \overline{1,n}$ — функції, регулярні в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leqslant i, j \leqslant n$ та $i \neq j$ та довільних різних $z_1, z_2 \in U$.

Правильні такі твердження.

Теорема 1. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geqslant 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$, деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k, $k = \overline{1,n}$ — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k > \frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору функцій f_k, $k = \overline{1,n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leqslant i, j \leqslant n$ та $i \neq j$ та довільних різних $z_1, z_2 \in U$, виконується така нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|^{\gamma_k} \leqslant (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}.$$

Теорема 2. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geqslant 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$ — деякий набір фіксованих точок розширеної комплексної площини, причому $a_n = \infty$; f_k, $k = \overline{1,n-1}$ — функції, регулярні і однолисті в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$; f_n — регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, та однолиста в області $|z| > 1$, причому $f_n(\infty) = \infty$, і нехай γ_k, $k = \overline{1,n}$ — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k > \frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді виконується наступна нерівність:*

$$\left(\frac{1}{|f_n'(\infty)|}\right)^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{n-1} |f_k'(0)|^{\gamma_k} \leqslant (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{i,j=1, i<j}^{n-1} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}.$$

Теорема 3. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geqslant 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k, θ_k, $k = \overline{1,n}$ — деякі додатні дійсні числа, причому $\alpha_k \geqslant \theta_k$ $\forall k = \overline{1,n}$ і $\alpha > \frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору функцій f_k, $k = \overline{1,n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leqslant i,j \leqslant n$ та $i \neq j$ та довільних різних $z_1, z_2 \in U$, виконується нерівність:*

$$\prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|^{\alpha_k} \leqslant (n-1)^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\theta_k)}{4}} \times$$

$$\times \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\alpha_i+\alpha_j-\theta_i-\theta_j-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\theta_k)}{n-1}\right)} \prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|^{\theta_k}.$$

Нерівність, наведена в теоремі 3, дозволяє оцінювати вираз (1) для деякого набору степенів α_k, маючи значення даного виразу для іншого набору степенів.

1. Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975, 336 с.
2. Бахтін О. К., Заболотний Я. В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. Укр. мат. журн., 2021, **73**, № 9, 1155 – 1169.