Про функціональну асимптотику розв'язків нелінійного рівняння типу Коші–Рімана–Бельтрамі

Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук

Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна

ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z\,, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x і y, відповідно.

Нехай $\sigma\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. Зауважимо, якщо $\overline{z}\,(\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1) \neq 0$, то рівняння (2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{3}$$

При $m = 0$ рівняння (3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1). Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Відображення $f\colon G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с. *Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння* (3) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f\colon G \to \mathbb{C}$, який м.с. в області G задовольняє рівняння (3).

Всюди далі будемо вважати, що

$$\gamma_r = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\} \quad \mathbb{A}(0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < r_2\},$$

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}.$$

Лема 1. *Нехай $m > 0$, $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3) *класу Соболева $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0) = 0$ і*

$$I_{m,\sigma}(t) = \left(\int\limits_{\gamma_t} \frac{ds}{|z| \left(\operatorname{Im} \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \neq \infty$$

для м.в. $t \in (0,1)$. Припустимо, що для деяких чисел $C > 0$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ та такої вимірної (за Лебегом) невід'ємної на $(0, \varepsilon_0)$ функції $\psi(t)$, що $0 < \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$ для довільного

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)} \frac{\psi^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)\,dxdy}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant C\,F(\varepsilon, \varepsilon_0),$$

де $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ *— деяка додатна та скінченна функція для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{\Phi(|z|)} \leqslant c_0\, C^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де $\Phi(\varepsilon) = \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^{-\frac{m+2}{m}} F^{\frac{m+1}{m}}(\varepsilon, \varepsilon_0)$ *та* $c_0 = (2\pi)^{-\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}}$.

Надалі будемо позначати:

$$e_1 = e,\; e_2 = e^e,\; ...,\; e_{k+1} = e^{e_k},$$

$$\ln_1 t = \ln t,\; \ln_2 t = \ln\ln t,\; ...,\; \ln_{k+1} t = \ln\ln_k t,$$

де $k \geqslant 1$ — натуральні числа.

Теорема 1. *Нехай* $m > 0$, $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $I_{m,\sigma}(t) \neq \infty$ *для м.в.* $t \in (0, e_n^{-1})$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{m+2}{m+1}$ *та* $\varepsilon_0 \in (0, e_n^{-1})$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \ln_k \frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{m+1}} \left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant C\left(\ln_{n+1}\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\alpha}$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Тоді*

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| \left(\ln_{n+1}\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}} \leqslant c_0\, C^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де $c_0 = (2\pi)^{-\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}}$.

Теорема 2. *Нехай* $m > 0$, $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболева* $W^{1,2}_{\rm loc}$ *з нормуванням* $f(0) = 0$ *і* $I_{m,\sigma}(t) \neq \infty$ *для м.в.* $t \in (0, 1)$. *Припустимо, що для деяких чисел* $C > 0$, $p > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{m+2}{m+1}$ *та* $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\,\varepsilon,\,\varepsilon_0)} \frac{\Phi_p^{\frac{m+2}{m+1}}(|z|)dxdy}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant C\, e^{\frac{\alpha}{\varepsilon^p}},$$

для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *де* $\Phi_p(t) = \frac{e^{\frac{1}{t^p}}}{t^{p+1}}$. *Тоді*

$$\liminf_{z \to 0} |f(z)| e^{\frac{\beta}{|z|^p}} \leqslant c_0\, p^{\frac{m+2}{m}} C^{\frac{m+1}{m}} < \infty,$$

де $\beta = \frac{m+2-\alpha(m+1)}{m}$ *та* $c_0 = (2\pi)^{-\frac{m+1}{m}} m^{-\frac{1}{m}}$.

1. Салімов Р. Р., Стефанчук М. В. Функціональна асимптотика розв'язків нелінійної системи Коші–Рімана–Бельтрамі. Нелінійні коливання, 2022, **25**, № 4, 388 – 403.