Про порядок росту одного класу відображень

Р. Р. Салімов, Б. А. Кліщук
Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна
ruslan.salimov1@gmail.com, kban1988@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелеву функцію $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \;\geqslant\; 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1,\infty)$. Тоді *p–модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Тут m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для довільних множин E, F і G в $\mathbb{R}^n$, позначимо через $\Delta(E,F,G)$ сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E та F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ та $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$
$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1,\, 2\,.$$

Нехай $Q\colon D \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \;\leqslant\; \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,\ r_1, r_2)$ і для кожної вимірної функції $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ та для гомеоморфізму $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ покладемо

$$L(x_0, f, R) = \max_{|x-x_0|=R} |f(x) - f(x_0)|\,.$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 1 ([1])**.** *Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці x_0 при $p > n$, де x_0 — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $0 \leqslant \kappa \leqslant p$, $r_0 > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0, r_0, R)} Q(x)\, \psi^p(|x - x_0|)\, dm(x) \;\leqslant\; c\, I^{\kappa}(r_0, R) \quad \forall\, R > r_0\,,$$

де $\psi(t)$ *— така невід'ємна вимірна за Лебегом функція на* $(0,+\infty)$*, що*

$$0 < I(r_0,R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt < \infty \quad \forall\, R > r_0\,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0,f,R)\, I^{\frac{\kappa-p}{p-n}}(r_0,R) \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$*.*

Поклавши в теоремі 1 $\kappa = n$, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 1 ([1])**.** *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* x_0 *при* $p > n$*, де* x_0 *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$*. Якщо для деяких чисел* $c > 0$*,* $r_0 > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\,\psi^p(|x-x_0|)\,dm(x) \ \leqslant\ c\,I^n(r_0,R) \quad \forall\, R > r_0\,,$$

де $\psi(t)$ *— така невід'ємна вимірна за Лебегом функція на* $(0,+\infty)$*, що*

$$0 < I(r_0,R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt < \infty \quad \forall\, R > r_0\,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,f,R)}{I(r_0,R)} \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$*.*

Вибравши в теоремі 1 функцію $\psi(t) = \frac{1}{t}$, отримаємо ще один наслідок.

Наслідок 2 ([1])**.** *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* Q*-гомеоморфізм відносно* p*-модуля в точці* x_0 *при* $p > n$*, де* x_0 *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$*. Якщо для деяких чисел* $c > 0$*,* $0 \leqslant \kappa \leqslant p$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \ \leqslant\ c\,\ln^\kappa R \quad \forall\, R > r_0\,,$$

то

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,f,R)}{(\ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geqslant \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}\,,$$

де ω_{n-1} *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$*.*

1. Salimov R. R., Klishchuk B. A. On the behavior of one class of homeomorphisms at infinity. Ukrain. Math. J., 2022, **74**, No. 10, 1416 – 1426.