Ланцюгові A_2-дроби і їхні застосування

С. П. Ратушняк[1,2], І. М. Лисенко[2]

[1]Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна

[2]Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

ratush404@gmail.com, i.m.lysenko@udu.edu.ua

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт двосимвольної системи кодування чисел, $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту.

Для будь-якого числа $x \in (0; 1]$ існує така послідовність $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in L$, що

$$x = -\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\alpha_1} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\alpha_2} + \ddots}} \equiv \Delta_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2...}. \tag{1}$$

Вираз (1) називається нескінченним ланцюговим A_2-дробом, його елементами є $\frac{1}{2}$ і 1, а символічний запис $\Delta_{\alpha_0\alpha_1...\alpha_n...}$ дробу і його значення називається A-зображенням числа x.

Зліченна множина чисел з відрізка $[0; 1]$ має два зображення, оскільки $\Delta_{\alpha_0\alpha_1...\alpha_n1(10)} = \Delta_{\alpha_0\alpha_1...\alpha_n0(01)}$ [1]. Вони називаються A-бінарними, решта чисел мають єдине A-зображення і називаються A-унарними (аналогічна ситуація має місце для класичного двійкового зображення) [3].

A-циліндром рангу $m \in N$ з основою $c_0c_1c_2...c_m$ називається множина

$$\Delta_{c_0c_1c_2...c_m} = \{x \colon x = \Delta_{c_0c_1c_2...c_m\beta_1...\beta_n...}, (\beta_n) \in L\}$$

всіх чисел $x \in [0; 1]$, що мають нескінченне A-зображення, перші цифри яких відповідно рівні $c_0, c_1, c_2, ..., c_m$. Очевидно, що $\Delta_{c_0c_1...c_m} = \Delta_{c_0c_1...c_m1} \cup \Delta_{c_0c_1...c_m0}$.

1) A-циліндр $\Delta_{c_0c_1...c_m}$ є відрізком з кінцями: $\Delta_{c_0c_1...c_m(10)}$ і $\Delta_{c_0c_1...c_m(01)}$, причому, який з них лівий, а який правий залежить від парності та непарності числа m.

2) Довжина циліндра $\Delta_{c_0c_1...c_m}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_0c_1...c_m}| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)} \leqslant \frac{1}{q_{m-1}^2},$$

де q_m — знаменник m-го порядку підхідного дробу, тобто знаменник раціонального числа, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[-\frac{1}{2}c_0; (\frac{1}{2})^{c_1}, (\frac{1}{2})^{c_2}, ..., (\frac{1}{2})^{c_m}]$, який обчислюється за формулами $q_0 = 1$, $q_1 = (\frac{1}{2})^{c_1}$, $q_{n+1} = (\frac{1}{2})^{c_{n+1}}q_n + q_{n-1}$, де $c_n \in A$, $n = \overline{1, m}$ [3].

Теорема 1 ([2]). *Функція, означена на відрізку $[\frac{1}{2}; 1]$ рівністю*

$$I(\Delta_{0\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta_{0[1-\alpha_1][1-\alpha_2]...[1-\alpha_n]...},$$

яка називається інверсором цифр A-зображення чисел, є строго спадною сингулярною функцією, тобто неперервною функцією, похідна якої рівна нулю майже скрізь (у розумінні міри Лебега). Графік інверсора є структурно фрактальною множиною.

Теорема 2. *Множина точок площини*

$$S = \Big\{(x;y)\colon x = \Delta_{0\alpha_1\alpha_2\ldots}, y = \Delta_{0\beta_1\beta_2\ldots}, (\alpha_{2k-1}, \beta_{2k-1}) \neq (0;0), (\alpha_{2k}, \beta_{2k}) \neq (1,1), k \in N\Big\} \quad (2)$$

є фрактальною підмножиною квадрата $[\frac{1}{2};1] \times [\frac{1}{2};1]$ *з автомодельною структурою*

$$S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S),$$

де f_i *— стискаючі відображення, породжені оператором лівостороннього зсуву цифр A-зображення чисел. Вона є криволінійним аналогом трикутного Килима (Серветки) Серпінського, одна з “сторін” межі якого є графіком інверсора цифр A-зображення чисел.*

У доповіді розглядаються різнопланові застосування ланцюгового A-зображення чисел у теорії чисел, у конструктивній теорії локально складних функцій з фрактальними властивостями, у теорії сингулярних функцій та ймовірнісних мір, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі тощо.

1. Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V. A_2-continued fraction representation of real numbers and its geometry. Ukrain. Math. J., 2009, **61**, No. 4, 541 − 555.
2. Pratsiovytyi M. V., Goncharenko Y. V., Lysenko I. M., Ratushniak S. P. Continued A_2-fractions and singular functions. Matematychni Studii, 2022, **58**, No. 1, 3 − 12.
3. Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.