Узагальнена нерівність М. О. Лаврентьєва

І. В. Денега

Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна

iradenega@gmail.com

Нехай $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{N}$ та $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, U — відкритий одиничний круг з центром в початку координат, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ — однозв'язна область і $a \in B$. Згідно з теоремою Рімана про відображення, існує однолисте і конформне відображення області B на одиничний круг U при якому $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$. Якщо розглянути обернене відображення φ, яке здійснює відображення одиничного круга U на область B так, що $\varphi(0) = a$, то поняття конформного радіуса однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ визначається таким чином

$$R(B, a) = \frac{1}{|f'(a)|} = |\varphi'(0)|.$$

М. О. Лаврентьєв у роботі [1] розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох неперетинних однозв'язних областей, а саме справедливий такий результат.

Теорема 1. *Нехай a_1 і a_2 – деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$ і B_k, $a_k \in B_k$, $k \in \{1, 2\}$ – довільні неперетинні однозв'язні області на $\mathbb{C}$. Тоді справедлива нерівність*

$$R(B_1, a_1)R(B_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2 , \tag{1}$$

де рівність досягається для півплощин B_k і точок a_k, симетричних відносно їх спільної межі.

Пізніше (див., наприклад, [2]) результат М. О. Лаврентьєва був узагальнений для випадку мероморфних функцій. Тоді для будь-яких неперетинних областей $B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ нерівність (1) зберігається, при чому знак рівності в ній досягається коли області B_1 та B_2 мають такий вигляд

$$B_1 = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}} \colon \left| \frac{w - a_1}{w - a_2} \right| < \rho \right\}, \quad B_2 = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}} \colon \left| \frac{w - a_1}{w - a_2} \right| > \rho \right\},$$

де $\rho \in \mathbb{R}^+$. Одним з прикладів такої конфігурації областей є випадок, коли одна з областей обмежена колом вище вказаного типу, а інша область, в свою чергу, буде необмежена, тобто є доповненням до першої області.

В роботах Л. І. Колбіної [3, 4] була отримана оцінка добутку степенів конформних радіусів у випадку двох попарно неперетинних однозв'язних областей комплексної площини $\mathbb{C}$: при заданих скінченних різних точках a_1 і a_2 максимум

$$J_0 = \frac{4^{\alpha+\beta}\alpha^\alpha\beta^\beta}{|\alpha - \beta|^{\alpha+\beta}} \left| \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right|^{2\sqrt{\alpha\beta}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta}$$

величини $J = R^\alpha(B_1, a_1)R^\beta(B_2, a_2)$, α, $\beta \in \mathbb{R}^+$, відносно всеможливих пар областей B_1, B_2 таких, що $a_1 \in B_1 \subset \mathbb{C}$, $a_2 \in B_2 \subset \mathbb{C}$, досягається для полюсів та кругових областей квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(a_2 - a_1)[z - a_1 - \alpha(a_2 - a_1)/(\alpha - \beta)]}{(z - a_1)^2(z - a_2)^2}\, dz^2.$$

Далі узагальнення задачі М. О. Лаврентьєва проявилося через збільшення числа областей, відмови від фіксації полюсів відповідних квадратичних диференціалів, переходу до розширеної комплексної площини, розширення об'єкту дослідження – області, що взаємно не перетинаються, замінюють деяким класом відкритих множин або частково перетинних областей (див., наприклад, [5 – 9]).

Нехай $r(B, a)$ позначає внутрішній радіус області B відносно точки a (див., наприклад, [8, 9]). Виконуються подальші твердження.

Теорема 2 ([10])**.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедлива нерівність*

$$r^n\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2. \tag{2}$$

Нерівність (2) будемо називати узагальненою нерівністю М. О. Лаврентьєва, оскільки при $n = 1$ одержуємо результат теореми 1. Нерівність (2) при додаткових умовах на геометрію розташування точок a_k, $k = \overline{1, n}$, дозволяє уточнити теорему 1, а саме має місце наступний результат.

Наслідок 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $\{a_k\}_{k=1}^n$ таких, що $|a_k| = \rho \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, і системи будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, причому $r\left(B_1, a_1\right) = r\left(B_2, a_2\right) = \ldots = r\left(B_n, a_n\right)$, справедливе співвідношення*

$$r\left(B_0, 0\right) r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \rho^2, \quad k = \overline{1, n}.$$

1. Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений. Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., 1934, **5**, 159 – 245.
2. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
3. Колбина Л. И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении. Доклады Академии Наук СССР, серия мат., 1952, **84**, № 5, 865 – 868.
4. Колбина Л. И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области. Вестник Ленингр. ун-та, 1955, **5**, 37 – 43.
5. Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions. Proc. Lond. Math. Soc., 1938, **44**, 432 – 449.
6. Schaeffer A. C., Spencer D. C. Coefficient regions for schlicht functions. — New York, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1950.
7. Duren P. L., Schiffer M. Conformal mappings onto non-overlapping regions. In: Hersch J., Huber A. (eds) Complex Analysis. Birkhäuser, Basel, 1988, 27 – 39.
8. Бахтин А. К, Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе. — Праці Ін-ту мат-ки НАН України, 2008.
9. Dubinin V. N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. — Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
10. Bakhtin A. K., Denega I. V. Generalized M. A. Lavrentiev's inequality. J. Math. Sci., 2022, **262**, No. 2, 138 – 153.