# Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду

**М. С. Яковлєв**[1], **К.В. Ральченко**[1]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

*mykyta.yakovliev@gmail.com, kostiantynralchenko@knu.ua*

Велика кількість природних процесів, що змінюються з часом, традиційно моделюються математично з допомогою стандартного броунівського руху. Водночас, численні сучасні дослідження демонструють існування процесів з властивостями автомодельності, довготермінової залежності та складними кореляційними структурами [1, 2], які не можуть бути належним чином змодельовані за допомогою лише броунівського руху. Натомість, можна використати дробовий броунівський рух з індексом Херста $H$, прирости якого корелюють, та який має властивості короткотермінової ($H < \frac{1}{2}$) або довготермінової ($H > \frac{1}{2}$) залежності [3].

Нами досліджується наступна модель змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду:

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, t \geq 0, \tag{1}$$

де $W$ – вінерівський процес, $B^H$ – дробовий броунівський рух з параметром Херста $H \in (0,1)$, $W$ та $B^H$ – незалежні. Задача полягає в оцінюванні невідомих параметрів $(\theta, H, \sigma, \kappa)$ за спостереженнями $\{X_{kh}, k \in (0,1,2,\dots)\}, h > 0$.

Аналогічно роботі [4] ми вводимо наступні позначення:

$$\phi_N = \frac{X_{Nh}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right),$$

$$\xi_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)^2,$$

$$\eta_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)\left(X_{(k+2)h} - X_{(k+1)h}\right),$$

$$\zeta_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+2)h} - X_{kh}\right)\left(X_{(k+4)h} - X_{(k+2)h}\right).$$

Позначимо також

$$\tau_N = (\phi_N, \xi_N, \eta_N, \zeta_N). \tag{2}$$

Відповідно до леми 3.2 з [4] для довільного $H \in (0,1)$ буде мати місце збіжність $\tau_N \to (\mathsf{E}\phi_N, \mathsf{E}\xi_N, \mathsf{E}\eta_N, \mathsf{E}\zeta_N) = \tau_0$, м.н., при $N \to \infty$. Це дає нам можливість визначити консистентні оцінки для $(\theta, H, \sigma^2, \kappa^2)$ наступним чином:

$$\hat{\theta}_N = \frac{\phi_N}{h}, \widehat{H}_N = \frac{1}{2}\log_{2+}\frac{\zeta_N - 4\phi_N^2}{\eta_N - \phi_N^2},$$

$$\hat{\kappa}_N^2 = \frac{\eta_N - \phi_N^2}{h^{2\widehat{H}_N}(2^{2\widehat{H}_N-1} - 1)}, \quad \hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{h}\left(\xi_N - \phi_N^2 - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\widehat{H}_N}\right).$$

Строга консистентність побудованих оцінок була доведена в [4].

Введемо позначення:

$$\vartheta = (\theta, H, \kappa^2, \sigma^2), \qquad \widehat{\vartheta}_N = (\hat{\theta}_N, \widehat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Використовуючи теоретичні результати описані в [5] та [6], нами було доведено асимптотичну нормальність оцінки (2) у випадку $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, та побудовано формули для знаходження її асимптотичної коваріаційної матриці $\widetilde{\Sigma}$. Використовуючи отриману асимптотичну нормальність (2) ми змогли сформулювати наш основний результат у вигляді такої теореми:

**Теорема 1.** *Нехай $H \in (0, \frac{1}{2})$. Оцінка $\widehat{\vartheta}_N$ є асимптотично нормальною:*

$$\sqrt{N}\left(\widehat{\vartheta}_N - \vartheta\right) = \sqrt{N}\begin{pmatrix} \hat{\theta}_N - \theta \\ \widehat{H}_N - H \\ \hat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \\ \hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}\left(\vec{0}, \Sigma^0\right)$$

*з асимптотичною коваріаційною матрицею $\Sigma^0$ яка знаходиться за формулою*

$$\Sigma^0 = g'(\tau_0)\widetilde{\Sigma}\left(g'(\tau_0)\right)^\top,$$

*де $\widetilde{\Sigma}$ асимптотична коваріаційна матриця (2) та*

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\theta(l-2)}{k^2 h^{2H-1} l(l+2)} & 0 & \frac{-1}{\kappa^2 h^{2H} l \log 2} & \frac{1}{\kappa^2 h^{2H} l(l+2)\log 2} \\ \frac{-4\theta}{h^{2H-1}} \frac{2(l+2)(l-1)+cl(l-2)}{l^2(l+2)} & 0 & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2+c)l+2}{l^2} & \frac{-2}{h^{2H}} \frac{l(c+1)+2}{l^2(l+2)} \\ \frac{4\theta(l^2+4l-4)}{l^2} & \frac{1}{h} & -\frac{4(l+1)}{hl^2} & \frac{2}{hl^2} \end{pmatrix}.$$

*де $c = \log_2 h$ та $l = 2^{2H} - 2$.*

Нами також досліджено поведінку побудованих оцінок за допомогою методу Монте-Карло. Результати цього моделювання показали, що для великих $H$ побудовані оцінки є менш якісними ніж для малих значень $H$.

1. Sadique S., Silvapulle P.Long-term memory in stock market returns: international evidence. International Journal of Finance & Economics, 2001, 6, 1, 59–67.
2. Zhang W.-G., Xiao W.-L., He C.-X. Equity warrants pricing model under fractional Brownian motion and an empirical study. Expert Systems with Applications, 2009, 36, 2, 3056–3065.
3. Mishura Y. S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. —Berlin: Springer-Verlag, 2008, xviii+393.
4. Kukush A., Lohvinenko S., Mishura Y., and Ralchenko K. Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2021, 25, 1, 159–187.
5. Nourdin I. Selected aspects of fractional Brownian motion. —Milan: Springer , 2012, XII+124.
6. Nourdin I.,Peccati G., Podolskij M. Quantitative Breuer-Major theorems. Stochastic Processes and their Applications, 2011, 121, 4, 793–812.