Один розподіл степеневого ряду з параметризацією середнім

О. Ю. Волков

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

volkoval2704@gmail.com

В доповіді вивчається розподіл степеневого ряду функції $w(y) = (1+\sqrt{1-y})^{-\frac{1}{2}}$. Розподіли степеневого ряду з 1950 року почав вивчати Noack [1]

Означення 1. Нехай

$$w(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k, 0 < y < R,$$

і всі коефіцієнти цього ряду невід'ємні числа. Розподіл цілочисельної випадкової величини ξ, який задається формулою

$$p_k(y) = \Pr(\xi = k) = \frac{a_k y^k}{w(y)}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

називається розподілом степеневого ряду функції $w(y)$ з параметром y.

Для отримання числових характеристик розподілу використовують генератрису:

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k(y) z^k = \frac{1}{w(y)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k z^k = \frac{w(yz)}{w(y)}.$$

Тоді математичне сподівання дорівнює $E\xi = \frac{yw'(y)}{w(y)}$, дисперсія дорівнює $D\xi = y\frac{dE\xi}{dy}$.

Позначимо $E\xi$ через x. Тоді функція $x = \frac{yw'(y)}{w(y)}$ на проміжку $(0, R)$ має обернену $y = y(x)$, бо $\frac{dx}{dy} = \frac{D\xi}{y} > 0$. Тому можна вивчати розподіл степеневого ряду з іншою параметризацією, а саме характеризувати розподіл параметром x. Така параметризація називається параметризацією середнім (див., наприклад, [2, с. 670]). При такій параметризації

$$\Pr(\xi = k) = p(k, x) = p_k(y(x)) = \frac{(y(x))^k a_k}{w(y(x))}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x \in X = \left(0, \frac{Rw'(R)}{w(R)}\right), D\xi = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y(x)}{y'(x)}.$$

Функція $v(x) = \frac{y(x)}{y'(x)}$ називається дисперсійною функцією розподілу.

Мета даної роботи полягає в тому, щоб вивчити розподіл степеневого ряду функції $w(y) = (1+\sqrt{1-y})^{-\frac{1}{2}}$.

Теорема 1. *Початкові моменти α_m, центральні моменти μ_m, кумулянти χ_m, $m = 1, 2, \dots,$ задовольняють такі рекурентні співвідношення:*

$$\alpha_{m+1} = x\alpha_m + v(x)\frac{d\alpha_m}{dx}, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = x, \tag{1}$$

$$\mu_{m+1} = m\mu_{m-1} + v(x)\frac{d\mu_m}{dx}, \mu_0 = 1, \mu_1 = 0, \tag{2}$$

$$\chi_{m+1} = v(x)\frac{d\chi_m}{dx}, \chi_1 = x. \tag{3}$$

Зокрема, з (1), (2), (3) знаходимо:

$$\alpha_2 = x^2 + x(2x+1)(4x+1), \quad \alpha_3 = x^3 + 3x^2(2x+1)(4x+1) + v(x)v'(x),$$

$$\chi_2 = v(x), \quad \chi_3 = v(x)v'(x).$$

1. Noack A. A. Class of Random Variables with Discrete Distribution. Ann. Math. Statist., 1950, Vol. 21, No. 1, 127 – 132.
2. Kotz S., Balakrishnan N., Johnson N. Continuous Multivariate Distribution. — New York: John Wiley & Sons Inc, 2000, 722 pp.