Зображення чисел рядами Перрона ($\overline{P}$–зображення) та частоти цифр у $\overline{P}$–зображеннях чисел

М. П. Мороз

Інститут математики НАН України, Київ, Україна *moroznik22@gmail.com*

Означення 1. Рядом Перрона називають числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1-1)\, p_1\, (p_2-1)\, p_2 \dots (p_n-1)\, p_n p_{n+1}},$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільна послідовність натуральних чисел, $\mathbb{N} \ni p_n \geq r_{n-1}+1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Рядом Перрона, записаним у різницевій формі, називають ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(r_0+g_1-1)\,(r_0+g_1) \dots (r_{n-1}+g_n-1)\,(r_{n-1}+g_n)\,(r_n+g_{n+1})}, \tag{1}$$

де $g_n \in \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільну послідовність $\overline{P}$ функцій $\overline{\varphi}_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, та $\varphi_0 = const$. Якщо число $x \in (0;1]$ є сумою ряду (1), причому $r_0 = \overline{\varphi}_0$ та $r_n = \overline{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то розклад числа x в ряд (1) називають його $\overline{P}$–представленням, скорочений запис $\Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \dots}$ ряду (1) – $\overline{P}$–зображенням числа x, а число g_n – n–тою цифрою його $\overline{P}$–зображення.

Теорема 1. *Для довільної послідовності функцій $(\overline{\varphi}_n)_{n=0}^{\infty}$ кожне число $x \in (0;1]$ має єдине $\overline{P}$–представлення.*

Нехай $x = \Delta^{\overline{P}}_{g_1 g_2 \dots}$ та $N_i^{\overline{P}}(x,k)$ – кількість номерів n таких, що $g_n = i$ та $n \leq k$.

Означення 2. Якщо для числа x існує границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_i^{\overline{P}}(x,k)}{k} = \nu_i^{\overline{P}}(x),$$

то число $\nu_i^{\overline{P}}(x)$ називають асимптотичною частотою цифри i в $\overline{P}$–зображенні числа x.

Теорема 2. *Нехай $\overline{P}$–зображення таке, що з деякого номера n_0 для всіх $k \geq n_0$: $\overline{\varphi}_k = const$. Тоді якщо існує границя*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\overline{\varphi}_n}{(\overline{\varphi}_n + i - 1)\,(\overline{\varphi}_n + i)} \right) = \nu_i,$$

то для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ існує і при цьому одна й та ж сама асимптотична частота цифри i, що дорівнює ν_i.

Наслідок 1. *Нехай $\overline{P}$–зображення таке, що з деякого номера n_0 для всіх $k \geq n_0$: $\overline{\varphi}_k = const$. Тоді якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\varphi}_k = \infty$, то для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце рівність $\nu_i^{\overline{P}}(x) = 0$.*

Наслідок 2. *Якщо функції $\overline{\varphi}_k$ такі, що починаючи з деякого номеру $\overline{\varphi}_k \equiv r$, то для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \frac{r}{(r+i-1)(r+i)}.$$

Означення 3. Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини X, a^* — деякий елемент цієї множини, $N_{a^*}(k)$ — кількість номерів $n \le k$ таких, що $a_n = a^*$. Якщо для послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ та елемента a^* існує границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{a^*}(k)}{k} = \theta(a^*),$$

то число $\theta(a^*)$ називають асимптотичною частотою елемента a^* в послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 3. *Нехай $\overline{P}$–зображення таке, що з деякого номера n_0 для всіх $k \ge n_0$: $\overline{\varphi}_k = const$; $\theta(n)$ — асимптотична частота числа $n \in \mathbb{N}$ в послідовності $(\overline{\varphi}_k)_{k=n_0}^{\infty}$, причому $\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) = 1$. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\theta(n) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} \right).$$

Наслідок 3. *Нехай $\overline{P}$–зображення таке, що з деякого номера n_0 для всіх $k \ge n_0$: $\overline{\varphi}_k = const$. Також нехай послідовність $(\overline{\varphi}_k)_{k=n_0}^{\infty}$ періодична, починаючи з деякого номеру, причому цей період складається з чисел $c_1, \ldots, c_j$, що містяться в ньому $h_1, \ldots, h_j$ разів відповідно. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0;1]$ та для кожної цифри i має місце рівність*

$$\nu_i^{\overline{P}}(x) = \sum_{n=1}^{j} \left(\frac{h_n}{h_1 + \ldots + h_j} \cdot \frac{c_n}{(c_n+i-1)(c_n+i)} \right).$$