Деякі властивості розв'язків рівнянь із загальною стохастичною мірою

Б. І. Манікін[1]

[1]Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, Київ, Україна

bmanikin@gmail.com

Нехай $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин X, де X — довільна множина, $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — множина всіх випадкових величин на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тоді стохастичною мірою на $\mathcal{B}$ будемо називати σ-адитивне відображення $\mu: \ \mathcal{B} \to L_0$.

В роботі [1] було розглянуто стохастичне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(x) = 0\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, μ — загальна стохастична міра, визначена на борельовій σ-алгебрі підмножин $\mathbb{R}$, а оператор $\mathcal{L}$ має вигляд

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + b(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}. \tag{2}$$

Були доведені існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (1), заданого співвідношенням

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y) f(s,y,u(s,y))\,dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds, \tag{3}$$

де $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = 0$. Рівняння (1) можна також розглядати при $t \in [0,+\infty)$, при цьому розв'язок знову матиме вигляд (3). У статті [2] було показано, що за деяких умов на вимірні функції u_0, f, σ з (1) та a, b, c з (2)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| \to 0, \ \ t \to \infty, \text{м. с.}$$

Розглянемо тепер таке стохастичне рівняння:

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2\Delta_x u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))dx + \sigma(t,x)d\mu(t)\,, (t,x) \in \bar{D}, \\ u(t,x) = 0, \ (t,x) \in S, \quad u(0,x) = u_0(x), \ x \in B\,, \end{cases} \tag{4}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \bar{B}$, B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $S = (0,T] \times \partial B$. М'який розв'язок (4) задається співвідношенням

$$u(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y) f(s,y,u(s,y))dy$$

$$+ \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy, \tag{5}$$

де $G(t,x;s,y)$ — функція Гріна крайової задачі $a^2\Delta_x u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $u|_{(t,x)\in S} = 0$. Виявляється, що за певних умов на B, μ, u_0, f, σ розв'язок (5) існує, єдиний і для довільних $\delta \in (0,T)$, B', $\bar{B}' \subset B$ задовольняє співвідношення

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \leq L(|x_1 - x_2|^{\gamma_1} + |t_1 - t_2|^{\gamma_2})$$

для всіх t_1, $t_2 \in [\delta, T]$, x_1, $x_2 \in \bar{B}'$ і деяких сталих L, γ_1, γ_2.

Зауважимо, що аналогічне до (4) рівняння при $x \in \mathbb{R}^d$ було досліджено у [3]. Показані існування, єдиність та гельдеровість розв'язку.

1. Боднарчук І. М. Регулярність м'якого розв'язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою. Укр. мат. журн., 2017, 69, 1, 3 – 16.
2. Manikin B. Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure. Modern Stoch. Theory Appl. 2022, 9, 4, 483 – 498.
3. Боднарчук І. М., Шевченко Г. М. Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із загальною стохастичною мірою. Теорія ймовір. та матем. статист., 2015, 93, 7 – 21.