Задача Коші для рівняння гіперболічного типу математичної фізики з випадковою правою частиною

Д. В. Койтюк[1], О. М. Михайлишин[2], Г. І. Сливка-Тилищак[3]

[1,2,3]Державний вищий навчальний заклад
"Ужгородський національний університет", Ужгород, Україна

dmytro.koitiuk@uzhnu.edu.ua, oksana.mykhailyshyn@uzhnu.edu.ua, anna.slyvka@uzhnu.edu.ua

Рівняння гіперболічного типу з випадковими факторами є класичною задачею математичної фізики. Тому тематика даної роботи знаходиться на перетині двох галузей математики: рівнянь математичної фізики та випадкових процесів.

В роботі досліджується неоднорідне рівняння гіперболічного типу математичної фізики з випадковою правою частиною. Ми розглядаємо праву частину, як випадкову функцію з простору Орліча. Для даної задачі знайдено умови існування з ймовірністю одиниця класичного розв'язку, а також знайдено оцінки для розподілу супремуму розв'язку.

Розглянемо задачу Коші для рівняння коливання струни з випадковою правою частиною

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) + \xi(x,y,t), \tag{1}$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad t > 0,$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0, \tag{2}$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Нехай $\xi(x,y,t) = \{\xi(x,y,t),\ (x,y) \in R^2,\ t > 0\}$ – вибірково неперервне з ймовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, таке що $\mathbb{E}\xi(x,y,t) = 0$, $\mathbb{E}(\xi(x,y,t))^2 < +\infty$. Нехай $B(x,y,t,u,v,s) = \mathbb{E}\xi(x,y,t)\xi(u,v,s)$ – коваріаційна функція випадкового поля $\xi(x,y,t)$, яка є неперервною функцією.

Теорема 1. *Нехай*

$$G(u,v,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t \frac{\sin\left(a(t-\tau)\sqrt{u^2+v^2}\right)}{a\sqrt{u^2+v^2}} \tilde{\xi}(x,y,\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(u,v,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv \xi(x,y,\tau) dxdy,$$

і

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv G(u,v,t) dudv.$$

Якщо існують наступні інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \sin xu \cos yv G(u,v,t) dudv, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v \cos xu \sin yv G(u,v,t) dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv$$

і послідовності a_n, b_n *такі, що* $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *і для довільних* $A > 0$, $B > 0$ *і* $T > 0$ *послідовності інтегралів*

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_n}^{+b_n} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv, \quad \int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_n}^{+b_n} u \sin xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_n}^{+b_n} v \cos xu \sin yv G(u,v,t)dudv, \quad \int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_n}^{+b_n} u^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_n}^{+b_n} v^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv$$

збігаються рівномірно за ймовірністю для $|x| \le A$, $|y| \le B$, $0 \le t \le T$, *тоді функція* $u(x,y,t)$ *буде класичним розв'язком задачі (1)–(2).*