Стійкість від входу до стану для еволюційних систем без єдиності

Т. В. Юсипів[1]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

yusypivt7@gmail.com

Еволюційні системи без єдиності розв'язку відіграють важливу роль у загальній теорії нескінченновимірних динамічних систем [1]. Основним об'єктом якісної теорії для таких систем є глобальний атрактор – компактна інваріантна рівномірно притягуюча множина [2]. Одним з популярних підходів щодо вивчення робастної стійкості положень рівноваги нелінійних диференціальних рівнянь є теорія стійкості від входу до стану (ISS) [3,4]. Для нескінченновимірних систем відповідні узагальнення цієї теорії було зроблено в [5–8].

Застосування до системи типу реакції-дифузії. В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянуто наступну задачу (що має назву системи реакції-дифузії, або ж RD)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x) + d(t,x), \ x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $u = u(t,x) = (u^1(t,x), ..., u^N(t,x))$ – невідома вектор-функція, $f = (f^1, ..., f^N)$, $g = (g^1, ..., g^N)$ – задана функція, a – дійсна матриця $N \times N$, така, що $\frac{1}{2}(a + a^*) \geq \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, ..., d^N)$ – зовнішні збурення. Розглянемо незбурену систему ($d \equiv 0$)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x), \ x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

У роботі [9] дається оцінка відхилення розв'язків системи типу RD від атрактора, якщо на цю систему діє деяке збурення d. При цьому, використовучи загальну схему, запропоновану в [10], доведено властивість асимптотичного підсилення (AG) відносно глобального атрактора дисипативної RD-системи, а саме:

Для розв'язків задачі (1) з обмеженими збуреннями $\|d\|_\infty \leq R_0$ існує функція $\gamma \in K$, така, що $\forall u_0 \in H$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_d(t, u_0)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty),$$

де $\Theta \subset H$ – глобальний атрактор незбуреної системи (2).

Тут і надалі $\mathcal{K} := \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ | \ \gamma \text{ є строго зростаючою}, \gamma(0) = 0\}$.

Застосування до хвильового рівняння. В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ розглянуто збурену задачу

$$\begin{cases} y_{tt} + \alpha y_t - \triangle y + f(y) = h(x) \cdot d(t), \ t > 0 \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $\alpha > 0$, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), \exists c > 0 \ \forall s \in \mathbb{R} \ |f(s)| \leq c(1 + |s|^{\frac{n}{n-2}}) : \varliminf_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1$, де $\lambda_1 > 0$ – перше власне число оператора $-\triangle$ в $H_0^1(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$, $d \in D \subseteq L^\infty(0, +\infty)$ – збурюючий сигнал, D – деяка трансляційно інваріантна множина вхідних сигналів. Відомо [11], що незбурений випадок ($d \equiv 0$) задачі (3) в фазовому просторі $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ для кожного $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ має (можливо, неєдиний) розв'язок $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}([0, +\infty); X)$, $z(0) = z_0$, і всі розв'язки незбуреної задачі породжують многозначний напівпотік. Позначимо

$$S_d(t, 0, z_0) = \{z(t) | \ z(\cdot) \text{ розв'язок збуреної задачі (3)}, \ z(0) = z_0\},$$

У роботі [12] встановлено властивість асимптотичного підсилення (AG) відносно атрактора Θ незбуреної ($d \equiv 0$) системи, тобто:

Для розв'язків задачі (3) з обмеженими збуреннями $d \in D$ існує функція $\gamma \in \mathcal{K}$, така, що $\forall z_0 \in X$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, dist(S_d(t,0,z_0),\Theta) \le \gamma(\|d\|_\infty),$$

де $dist(A,B) = \sup\limits_{z_1\in A} \inf\limits_{z_2\in B} \|z_1 - z_2\|_X$ – напівметрика Хаусдорфа.

1. Temam J. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer, 2nd edition, 1997.
2. Kapustyan O. V., Sobchuk V. V., Yusypiv T. V., Pankov A. V. Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniquenes. Journal of optimization, differential equation and their applications (JODEA), 2022, 30, 49–61. DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142208
3. Sontag E. D. Mathematical control theory: deterministic finite-dimensional systems, Springer, 1998.
4. Sontag E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization, IEEE Trans. Automat. Control, 1989, 34, 435–443.
5. Dashkovskiy S. and Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems, Math. Contr. Sign. Syst., 2013, 25, 1–35.
6. Mironchenko A. and Wirth F. Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems, IEEE Trans. Autom. Contr., 2018, 63, 1602–1617.
7. Mironchenko A. and Prieur Ch. Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions, SIAM Review, 2020, 62, 529–614.
8. Schmid J. Weak input-to-state stability: Characterization and counterexamples, Math. Contr. Sign. Syst., 2019, 31, 433–454.
9. Капустян О. В., Курилко О. Б., Юсипів Т. В. Робастна стійкість атрактора системи реакції-дифузії, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2021, 3, 46–50. DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6
10. Dashkovskiy S., Kapustyan O., Schmid J. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 2020, 32, 309–326.
11. Ball J. M. Global attractors for damped semilinear wave equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2004, 10, 31–52.
12. Капустян О. В., Юсипів Т. В. Робастна стійкість атрактора нелінійного хвильового рівняння без єдиності розв'язку, Нелінійні коливання. Міжнародний математичний журнал. Інститут математики НАН України, 2022, 25, 2, 198–206.