Псевдогрупи точкових і контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника та його нелінійного представлення Лакса

О. О. Вінніченко[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

У статті [2] за допомогою оригінальної версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів з роботи [4] знайдено псевдогрупи G і $G_{\rm c}$ точкових та контактних симетрій бездисперсійного аналога

$$u_{txy}=(u_{xx}u_{xy})_x+(u_{xy}u_{yy})_y \tag{1}$$

(симетричного потенціального) рівняння Нижника, яке назвемо бездисперсійним рівнянням Нижника; див. [2] щодо обґрунтування цієї назви.

Максимальна (псевдо)алгебра $\mathfrak g$ ліївської інваріантності рівняння (1) нескінченновимірна і є лінійною оболонкою векторних полів [5]

$$\begin{gathered}
D^t(\tau)=\tau\partial_t+\tfrac13\tau_tx\partial_x+\tfrac13\tau_ty\partial_y-\tfrac1{18}\tau_{tt}(x^3+y^3)\partial_u,\quad D^{\rm s}=x\partial_x+y\partial_y+3u\partial_u,\\
P^x(\chi)=\chi\partial_x-\tfrac12\chi_tx^2\partial_u,\quad P^y(\rho)=\rho\partial_y-\tfrac12\rho_ty^2\partial_u,\\
R^x(\alpha)=\alpha x\partial_u,\quad R^y(\beta)=\beta y\partial_u,\quad Z(\sigma)=\sigma\partial_u,
\end{gathered}$$

де параметр-функції τ, χ, ρ, α, β, σ пробігають множину гладких функцій від t.

У обчисленні псевдогруп G і $G_{\rm c}$ використано такі мегаідеали (див. означення в [1, 6]) алгебри $\mathfrak g$:

$$\begin{gathered}
\big\langle D^t(\tau),P^x(\chi),P^y(\rho),R^x(\alpha),R^y(\beta),Z(\sigma)\big\rangle,\quad \big\langle D^{\rm s},P^x(\chi),P^y(\rho),R^x(\alpha),R^y(\beta),Z(\sigma)\big\rangle,\\
\big\langle P^x(\chi),P^y(\rho),R^x(\alpha),R^y(\beta),Z(\sigma)\big\rangle,\quad \big\langle R^x(\alpha),R^y(\beta),Z(\sigma)\big\rangle,\quad \big\{Z(\sigma)\big\},\quad \big\langle Z(1)\big\rangle.
\end{gathered}$$

Теорема 1. (i) *Псевдогрупу G точкових симетрій бездисперсійного рівняння Нижника* (1) *породжують перетворення вигляду*

$$\begin{gathered}
\tilde t=T(t),\quad \tilde x=CT_t^{1/3}x+X^0(t),\quad \tilde y=CT_t^{1/3}y+Y^0(t),\\
\tilde u=C^3u-\frac{C^3T_{tt}}{18T_t}(x^3+y^3)-\frac{C^2}{2T_t^{1/3}}(X^0_tx^2+Y^0_ty^2)+W^1(t)x+W^2(t)y+W^0(t)
\end{gathered}$$

разом з перетворенням J: $\tilde t=t$, $\tilde x=y$, $\tilde y=x$, $\tilde u=u$. Тут T, X^0, Y^0, W^0, W^1 і W^2 — довільні гладкі функції змінної t з $T_t\neq0$, а C — довільна ненульова стала.

(ii) *Псевдогрупа $G_{\rm c}$ контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника* (1) *збігається з першим продовженням $G_{(1)}$ псевдогрупи G.*

Зауваження 1. Необхідна умова, що підняття Φ_* алгебри $\mathfrak g$ будь-яким елементом Φ псевдогрупи G міститься в $\mathfrak g$, повністю визначає цю псевдогрупу. Це перший і поки єдиний приклад такого роду в літературі.

Зауваження 2. При доведенні пункту (ii) теореми 1 в [2] оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів вперше застосовано для обчислення (псевдо)групи контактних симетрій деякого диференціального рівняння. Декілька аналогічних прикладів використання версії алгебраїчного методу на основі автоморфізмів у скінченновимірну випадку наведено лише в [3].

Схожим шляхом псевдогрупу точкових симетрій побудовано і для нелінійного представлення Лакса бездисперсійного рівняння Нижника (1)

$$v_t = \frac{1}{3}\left(v_x^3 - \frac{u_{xy}^3}{v_x^3}\right) + u_{xx}v_x - \frac{u_{xy}u_{yy}}{v_x}, \quad v_y = -\frac{u_{xy}}{v_x}, \tag{2}$$

яке можна отримати як бездисперсійний аналог представлення Лакса рівняння Нижника. Максимальна (псевдо)алгебра $\mathfrak{g}_{\rm L}$ ліївської інваріантності системи (2) є лінійною оболонкою векторних полів

$$\bar D^t(\tau) = \tau\partial_t + \tfrac13\tau_t x\partial_x + \tfrac13\tau_t y\partial_y - \tfrac1{18}\tau_{tt}(x^3+y^3)\partial_u, \quad \bar D^{\rm s} = x\partial_x + y\partial_y + 3u\partial_u + \tfrac32 v\partial_v,$$
$$\bar P^x(\chi) = \chi\partial_x - \tfrac12\chi_t x^2\partial_u, \quad \bar P^y(\rho) = \rho\partial_y - \tfrac12\rho_t y^2\partial_u,$$
$$\bar R^x(\alpha) = \alpha x\partial_u, \quad \bar R^y(\beta) = \beta y\partial_u, \quad \bar Z(\sigma) = \sigma\partial_u, \quad \bar P^v = \partial_v,$$

де параметр-функції τ, χ, ρ, α, β і σ пробігають множину довільних гладких функцій від t.

Теорема 2. *Псевдогрупу $G_{\rm L}$ точкових симетрій нелінійного представлення Лакса* (2) *породжують перетворення вигляду*

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = A^{2/3}T_t^{1/3}x + X^0(t), \quad \tilde y = A^{2/3}T_t^{1/3}y + Y^0(t),$$

$$\tilde u = A^2u - \frac{A^2T_{tt}}{18T_t}(x^3+y^3) - \frac{A^{4/3}}{2T_t^{1/3}}(X^0_t x^2 + Y^0_t y^2) + W^1(t)x + W^2(t)y + W^0(t), \quad \tilde v = Av + B$$

разом з перетворенням J: $\tilde t = t$, $\tilde x = y$, $\tilde y = x$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v$. Тут T, X^0, Y^0, W^0, W^1 і W^2 — довільні гладкі функції змінної t з $T_t \neq 0$, а A і B — довільні сталі з $A \neq 0$.

Наведений опис псевдогруп точкових та контактних симетрій рівняння (1) і його нелінійного представлення Лакса (2) виправляє і суттєво узагальнює результати з [5], а також є важливим кроком у розширеному симетрійному аналізі цього рівняння.

Авторка висловлює вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку за визначення напрямку дослідження, постановку задач та перевірку отриманих результатів. Це дослідження частково підтримано Simons Foundation у рамках програми Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants.

1. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E. M. and Popovych R. O. Algebraic method for finding equivalence groups. J. Phys. Conf. Ser., 2015, 621, 012001, 17 pp., arXiv:1503.06487.
2. Boyko V. M., Popovych R. O. and Vinnichenko O. O. Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation. arXiv:2211.09759, 27 pp.
3. Hydon P. E. How to find discrete contact symmetries. J. Nonlinear Math. Phys., 1998, 5, No. 4, 405–416.
4. Maltseva D. S. and Popovych R. O. Complete point-symmetry group, Lie reductions and exact solutions of Boiti–Leon–Pempinelli system. arXiv:2103.08734, 44 pp.
5. Morozov O. I. and Chang J.-H. The dispersionless Veselov–Novikov equation: symmetries, exact solutions, and conservation laws. Anal. Math. Phys., 2021, 11, No. 3, 26 pp.
6. Popovych R. O., Boyko V. M., Nesterenko M. O. and Lutfullin M. W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras. J. Phys. A, 2003, 36, No. 26, 7337–7360, arXiv:math-ph/0301029.