Про фредгольмові крайові задачі у просторах Соболєва-Слободецького

Т. Б. Скоробогач

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" , Київ, Україна

tetianaskorobohach@gmail.com

Нехай задано скінченний інтервал (a, b) дійсної осі, дійсне число $p \in [1, \infty)$, натуральне число m і дробове число $s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}$.

Розглянемо неоднорідну крайову задачу

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{1}$$

$$By = c. \tag{2}$$

Тут задана матриця-функція $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (W_p^{s-1})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^r$ і лінійний неперервний оператор

$$B\colon\ (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r, \tag{3}$$

а шуканою є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$. Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміється вектор-функція $(\cdot) \in (W_p^s)^m$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $s > 1+1/p$ скрізь) на (a, b) та рівність (2), що рівносильна r скалярним крайовим умовам. Якщо $r > m$, то крайові умови перевизначені, а якщо $r < m$, то недовизначені.

Крайові умови вигляду (3) охоплюють усі відомі типи крайових умов (задачі Коші, дво- і багатоточкові, інтегральні та мішані задачі) а також некласичні крайові умови. Ці умови можуть містити похідні роз'язку цілого або дробового порядків.

Розв'язки рівняння (1) заповнюють простір $(W_p^s)^m$, коли праві частини рівняння $f(\cdot)$ перебігають простір $(W_p^{s-1})^m$. Зважаючи на це, неодронідні крайові умови виду (3) є найбільш загальними для диференціальної системи (1).

З крайовою задачею (1), (2) пов'язаний лінійний оператор

$$(L, B)\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r. \tag{4}$$

Теорема 1. *Лінійний оператор* (4) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m - r$.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y(a) = I_m, \tag{5}$$

де O_m — нульова, а I_m — одинична $(m \times m)$ — матриці.

Означення 1. Прямокутна числова матриця

$$M(L, B) \in \mathbb{C}^{m\times r}$$

є характеристичною для крайової задачі (1), (2), якщо її j-й стовпчик є результатом дії оператора B на j-й стовпчик матриці-функції $Y(\cdot)$.

Теорема 2. *Вимірності ядра і коядра оператора* (4) *дорівнюють відповідно вимірності ядра і коядра характеристичної матриці*

Наслідок 1. *Оператор (L, B) є оборотним тоді і тільки тоді, коли $r = m$ і квадратна матриця $M(L, B)$ є невиродженою.*

Приклад 1. Розглянемо лінійну *одноточкову* крайову задачу для диференціального рівняння

$$y'(t) + Ay(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{6}$$

$$By = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) = c, \tag{7}$$

де A є сталою $m \times m-$ матрицею, вектор-функція $f(\cdot)$ належить простору $(W_p^{s-1})^m$, матриці $\alpha_k \in \mathbb{C}^{r\times m}$, вектор $c \in \mathbb{C}^r$, оператор

$$(L, B)\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r,$$

. Тоді характеристична матриця

$$M(L, B) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k.$$

Результати доповіді опубліковані в статтях:

1. Mikhailets V. A., Skorobohach T. B. On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev-Slobodetskiy spaces. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2020, No. 5, 10–14.
2. Михайлець В. А., Атласюк О. М., Скоробогач Т. Б. Про розв'язність фредгольмових крайових задач у дробових просторах Соболєва. Український математичний журнал, 2023, т.75, №1, 96–104.