International Conference of Young Mathematicians
The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine

Симетрійний аналіз (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона

О. В. Локазюк[1]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

sasha.lokazuik@gmail.com

У доповіді буде представлено результати симетрійного аналізу класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона

$$u_{tx} = f(t,x,u) \quad \text{з} \quad f_{uu} \neq 0, \tag{1}$$

з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності. Як суттєве узагальнення результатів Лі доведено, що групоїд контактної еквівалентності класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона є продовженням першого порядку групоїда точкової еквівалентності цього класу (див. [1, лема 2]). У роботі [1] також доведено, що клас (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона є нормалізованим (відносно точкових перетворень), і побудовано його групу еквівалентності $G^{\sim}$ та відповідну алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$. Справедливе наступне твердження:

Твердження 1. *Максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_f$ рівняння K_f із класу* (1) *утворюють векторні поля вигляду*

$$\tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + \big(\eta^1 u + \eta^0(t,x)\big)\partial_u,$$

де параметр-функції $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta^0 = \eta^0(t,x)$ та стала η^1 задовольняють класифікаційне рівняння

$$\tau f_t + \xi f_x + \big(\eta^1 u + \eta^0\big) f_u = \big(\eta^1 - \tau_t - \xi_x\big) f + \eta^0_{tx}.$$

Оскільки клас (1) є нормалізованим (див. необхідні означення та термінологію в [1]), а його група еквівалентності має специфічну структуру, то для його повної групової класифікації використано алгебраїчний метод у поєднанні з ефективним залученням класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. У класі (1) виокремлено рівняння Ліувілля як єдине рівняння з нескінченновимірною алгеброю ліївської інваріантності та досліджено властивості скінченновимірних придатних підалгебр проєкції $\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim}$ алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір із координатами (t,x,u). У роботі [1] доведено, що $\dim\mathfrak{g}_f = \dim\pi^{t,x}_*\mathfrak{g}_f$, і показано, що $\dim\mathfrak{g}_f \leqslant 4$, якщо рівняння з класу допускає скінченновимірну алгебру ліївської інваріантності. У наступній теоремі представлено основний результат групової класифікації у вигляді повного списку $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1).

Теорема 1. *Повний список $G^{\sim}$-нееквівалентних* (*максимальних*) *розширень ліївських симетрій у класі* (1) *вичерпують такі випадки:*

0. *Загальний випадок $f = f(t,x,u)$:* $\{0\}$;
1. $f = \hat f(x,u)$: $\langle\partial_t\rangle$;
2. $f = \hat f(x-t,u)$: $\langle\partial_t + \partial_x\rangle$;
3. $f = \mathrm{e}^t \hat f(x, \mathrm{e}^{-t}u)$: $\langle\partial_t + u\partial_u\rangle$;

4. $f=\mathrm{e}^{x+t}\hat f(x-t,\mathrm{e}^{-x-t}u)$: $\langle\partial_t+\partial_x+2u\partial_u\rangle$;
5. $f=\mathrm{e}^{t}\hat f(\mathrm{e}^{-t}u)$: $\langle\partial_t+u\partial_u,\,\partial_x\rangle$;
6. $f=\mathrm{e}^{x+t}\hat f(\mathrm{e}^{-x-t}u)$: $\langle\partial_t+u\partial_u,\,\partial_x+u\partial_u\rangle$;
7. $f=|x-t|^{-q-2}\hat f(|x-t|^q u)$, $q\neq0$: $\langle\partial_t+\partial_x,\,t\partial_t+x\partial_x-qu\partial_u\rangle$;
8. $f=|x|^{-q-2}\hat f(|x|^q u)$, $q\neq0$: $\langle\partial_t,\,t\partial_t+x\partial_x-qu\partial_u\rangle$;
9. $f=\hat f(u)$: $\langle\partial_t,\,\partial_x,\,t\partial_t-x\partial_x\rangle$;
10. $f=(x-t)^{-2}\hat f(u)$: $\langle\partial_t+\partial_x,\,t\partial_t+x\partial_x,\,t^2\partial_t+x^2\partial_x\rangle$;
11. $f=\mathrm{e}^{u/x}$: $\langle\partial_t,\,t\partial_t-x\partial_u,\,x\partial_x+u\partial_u\rangle$;
12. $f=|u|^p u$, $p\neq-1,0$: $\langle\partial_t,\,\partial_x,\,t\partial_t-x\partial_x,\,-pt\partial_t+u\partial_u\rangle$;
13. $f=\mathrm{e}^{u}$: $\langle\tau(t)\partial_t+\xi(x)\partial_x-(\tau_t(t)+\xi_x(x))\partial_u\rangle$.

Тут $\hat f$ — довільна гладка функція своїх аргументів, $\hat f_{uu}\neq0$, q та p — довільні сталі, які задовольняють умовам, що зазначені у відповідних випадках. У випадку 13 компоненти τ та ξ пробігають відповідно множину гладких функцій змінних t або x.

Також у роботі [1] знайдено низку $G^\sim$-інваріантних цілочисельних характеристик підалгебр алгебри $\mathfrak g^\sim$, які дозволяють повністю ідентифікувати $G^\sim$-нееквівалентні випадки розширень ліївської симетрії у класі (1). Ці характеристики використано для розрізнення, з точністю до $G^\sim$-еквівалентності, послідовних розширень ліївської симетрії для випадків наведених у теоремі 1. Таким чином, вичерпно описано структуру частково впорядкованої множини $G^\sim$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1), яку представлено в [1] у вигляді діаграми Хассе.

Класифікація ліївських симетрій є першим необхідним кроком для розширеного симетрійного аналізу рівнянь із класу (1). Її можна використовувати для класифікації ліївських редукцій та подальшої побудови точних інваріантних розв'язків цих рівнянь.

Автор висловлює вдячність Вячеславу Миколайовичу Бойку та Роману Омеляновичу Поповичу за визначення напрямку дослідження, постановку задач та постійну підтримку. Роботу виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (проєкт 2020.02/0089).

1. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, Anal. Math. Phys., 2021, 11, 127, 38 pp.; arXiv:2008.05460.