Стабілізація керованих коливань моделі антени орбітального супутника

Є. О. Євгеньєва[1,2], О. Л. Зуєв[1,2], Ю. І. Калоша[1]

[1]Інститут прикладної математики і механіки
Національної академії наук України, Черкаси

[2]Інститут складних технічних систем ім. Макса Планка, Маґдебурґ, Німеччина

bashtynskaya.evgeniya@gmail.com, zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de, julykucher@gmail.com

У доповіді запропоновано математичну модель коливань антени орбітального супутника ([1], [2]). Передбачається, що супутник складається з твердого тіла-носія, яке рухається вздовж навколоземної орбіти, та консольно закріпленої антени у вигляді пружної балки. Із супутником пов'язано систему координат $Oxyz$ з точкою O в центрі мас супутника та ортами $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$. Балку довжини l закріплено в точці $(0,0,l_0)$ таким чином, що у недеформованому стані центральна лінія балки займає відрізок $[l_0, l_0+l]$ осі Oz. Поперечне переміщення точки балки з координатою $(0,0,\xi)$ в момент часу t задається функцією $\mathbf{w}(\xi,t) = w_1(\xi,t)\mathbf{e_1} + w_2(\xi,t)\mathbf{e_2} + w_3(\xi,t)\mathbf{e_3}$, де $\xi = z - l_0$, $w_3 = \xi + l_0$.

Нехай $\boldsymbol{\omega}(t)$ — вектор кутової швидкості руху системи координат, пов'язаної з супутником, відносно орбітальної системи координат, ω_1, ω_2, ω_3 — проєкції вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ на вісі Ox, Oy, Oz, відповідно. За допомогою варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з урахуванням роботи зовнішніх сил отримано рівняння коливань пружної балки. Рівняння руху з урахуванням доданків порядку малості не вище другого мають вигляд (див., напр., [3]):

$$\ddot{w}_1 + \frac{EI}{\rho A} w_1'''' = 2\omega_3\dot{w}_2 + u_3 w_2 - (u_2 + \omega_1\omega_3)(\xi + l_0), \tag{1}$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{EI}{\rho A} w_2'''' = -2\omega_3\dot{w}_1 - u_3 w_1 + (u_1 - \omega_2\omega_3)(\xi + l_0), \tag{2}$$

з крайовими умовами

$$w_1(0,t) = w_2(0,t) = 0, \quad w_1'(0,t) = w_2'(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$w_1''(l,t) = w_2''(l,t) = 0, \quad w_1'''(l,t) = w_2'''(l,t) = 0. \tag{4}$$

Тут E — модуль Юнга, I та A — момент інерції та площа поперечного перетину балки, відповідно, ρ — щільність матеріалу балки. Розглядається однорідна балка, тому механічні параметри E, I, A та ρ вважатимемо додатними сталими.

Величини u_1, u_2, u_3 у рівняннях (1), (2) відповідають похідним кутової швидкості тіла-носія і в даній роботі розглядаються в якості керуючих впливів. Фізична реалізація такого керування здійснюється належним вибором моментів сил, прикладених до тіла-носія.

Повну енергію балки можна представити у вигляді

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left((\dot{w}_1)^2 + (\dot{w}_2)^2\right) d\xi + \frac{1}{2}\int_0^l EI\left((w_1'')^2 + (w_2'')^2\right) d\xi, \tag{5}$$

та її похідну за часом в силу системи (1)–(4) — у вигляді

$$\frac{\dot{\mathcal{E}}}{\rho A} = -(u_2 + \omega_1\omega_3)\int_0^l (\xi + l_0)\dot{w}_1 d\xi + (u_1 - \omega_2\omega_3)\int_0^l (\xi + l_0)\dot{w}_2 d\xi + u_3\int_0^l (w_2\dot{w}_1 - w_1\dot{w}_2)\, d\xi.$$

Запропоновано закон керування у вигляді зворотного зв'язку, який забезпечує недодатність похідної функціонала (5):

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \omega_2\omega_3 - \alpha_1 \int_0^l (\xi + l_0)\dot{w}_2 d\xi, \\
u_2 &= -\omega_1\omega_3 + \alpha_2 \int_0^l (\xi + l_0)\dot{w}_1 d\xi, \\
u_3 &= -\alpha_3 \int_0^l (w_2\dot{w}_1 - w_1\dot{w}_2) d\xi,
\end{aligned} \tag{6}
$$

де α_i, α_2, α_3 — додатні сталі параметри.

Оскільки $\dot{\mathcal{E}} \leqslant 0$ на траєкторіях замкненої системи (1)–(4), (6), на основі прямого методу Ляпунова доведено стійкість стану рівноваги $\mathbf{w}(\xi, t) = 0$ замкненої системи.

Роботу виконано за підтримки бюджетної програми КПКВК 6541230 НАН України (тема ВБ-15-18-21/479)

1. Misra R., Wisniewski R., Zuyev A. Attitude Stabilization of a Satellite Having Only Electromagnetic Actuation Using Oscillating Controls. Aerospace, 2022, 9(8), 444.
2. Wisniewski R. Satellite attitude control using only electromagnetic actuation. Ph.D. Thesis, Department of Control Engineering, Aalborg University, Aalborg, Denmark, 1997.
3. Goldstein H., Poole C., Safko J. Classical Mechanics. 3rd Edition. — Boston: Addison Wesley, 2002, 638 p.