Спосіб рівності остач для знаходження невизначених коефіцієнтів при розкладі правильного дробу в суму простих

Р. Ю. Осауленко[1]

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна

RomanOsaulenko@gmail.com

Ми пропонуємо ще один спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів при розкладі правильного дробу в суму простих. В доповіді буде представлено лінійний і паралельний алгоритми реалізації запропонованого способу; наведено приклади застосування, зокрема для оптимізації методу Остроградського; розглянуто зв'язок із методом перекриття Хевісайда.

При діленні двох рівних многочленів на один і той же многочлен будемо отримувати рівність остач. Саме на такому тривіальному твердженні базується спосіб, який ми хочемо запропонувати.

Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний, нескоротний дріб. Знаменник представлено у вигляді добутку незвідних многочленів $Q_k(x)$:

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{n} \big(Q_k(x)\big)^{m_k} = \prod_{k=1}^{n} Q_k^{m_k}(x). \tag{1}$$

Тоді розклад дробу в суму простих дробів матиме вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{P_{k,j}(x)}{Q_k^j(x)} \right), \tag{2}$$

де $P_{k,j}(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами на степінь нижчий на одиницю від степеня многочлена $Q_k(x)$. Всього доданків у сумі: $T = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$. У випадку розкладу дробу на комплексній множині представлення (2) може бути записано більш простіше:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{k,j}}{Q_k^j(x)} \right), \ A_{k,j} \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Після домноження з подальшим спрощенням обох частин рівностей (2) і (3) на $Q(x)$ отримаємо:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \left(P_{k,j}(x) \cdot Q_k^{m_k - j}(x) \cdot \prod_{t=1}^{j-1} Q_t^{m_t}(x) \cdot \prod_{t=j+1}^{n} Q_t^{m_t}(x) \right), \tag{4}$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \left(A_{k,j} \cdot Q_k^{m_k - j}(x) \cdot \prod_{t=1}^{j-1} Q_t^{m_t}(x) \cdot \prod_{t=j+1}^{n} Q_t^{m_t}(x) \right). \tag{5}$$

При діленні двох рівних многочленів на один і той же многочлен будемо отримувати рівність остач. Саме на такому тривіальному твердженні базується метод, який ми хочемо запропонувати.

Лінійна реалізація способу рівності остач

Якщо в рівності (4) або (5) один із доданків перенести в ліву частину, то в праві частині можна виділити спільний множник. Оскільки права частина ділиться націло на цей цілий множник, то і ліва частина має ділитися на цей множник, тобто остача виразу зліва має дорівнювати нулю.

Паралельна реалізація способу рівності остач

Перед розглядом паралельної реалізації способу, розглянемо прості властивості остач при діленні многочленів.

Для двох многочленів P_1 і P_2 розглянемо операцію $\rtimes$ – знаходження остачі від ділення многочлена P_1 на P_2. Для скорочення записів будемо використовувати наступне позначення (R – многочлен, який є остачею від ділення):

$$P_1(x) \rtimes P_2(x) = R(x).$$

Опишемо властивості операції знаходження остачі:

1. $\big(A \cdot P_1(x)\big) \rtimes P_2(x) = A \cdot \big(P_1(x) \rtimes P_2(x)\big)$, $A \in \mathbb{R}$.
2. $\big(P_1(x) \pm P_2(x)\big) \rtimes P_3(x) = \Big(\big(P_1(x) \rtimes P_3(x)\big) \pm \big(P_2(x) \rtimes P_3(x)\big)\Big) \rtimes P_3(x)$.
3. $\big(P_1(x) \cdot P_2(x)\big) \rtimes P_3(x) = \Big(\big(P_1(x) \rtimes P_3(x)\big) \cdot \big(P_2(x) \rtimes P_3(x)\big)\Big) \rtimes P_3(x)$.

Ці властивості є тривіальними, тому опустимо їх доведення.

Паралельна реалізація базується на схожій ідеї що і лінійна. У правій частині рівності (4) або (5) виокремлюємо один доданок, так, щоб для всіх інших можна виділити спільний множник. Знаходимо остачу від ділення обох частин на спільний множник. В правій частині треба знайти остачу від ділення тільки для вибраного доданку, бо остачі у всіх інших будуть рівні нулю. Залишається прирівняти отримані остачі.

1. Bauldry William C. Partial Fractions via Calculus, PRIMUS, 2018, Vol. 28, No. 5, 425–437.
2. Man Yiu-Kwong An improved Heaviside approach to partial fraction expansion and its applications. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2009, Vol. 40, No 6, 808–814.
3. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник у 2 ч. Ч.1. Третє видання. — Київ: Вища школа, 2005, 447 с.