Основні теореми квазі-геодезичних відображень узагальнено-рекурентних просторів

М. І. Піструіл

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна

margaret.pistruil@gmail.com

Розглянемо узагальнено-рекурентний простір параболічного типу [1] (V_n, g_{ij}, F_i^h), з метричним тензором $g_{ij}(x)$ та афінором $F_i^h(x)$, який допускає квазі-геодезичні відображення (КГВ) [2] на простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. Тоді в загальній за відображенням системі координат (x^i) виконуються основні рівняння даного відображення [1]:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \phi_{(i}(x)F_{j)}^h(x),$$
$$F_i^h = \overline{F}_i^h(x),$$
$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0,$$
$$g_{i\alpha}F_j^\alpha = -g_{j\alpha}F_i^\alpha, \quad \overline{g}_{i\alpha}F_j^\alpha = -\overline{g}_{j\alpha}F_i^\alpha,$$
$$F_{(i,j)}^h = F_{(i|j)}^h = q_{(j}F_{i)}^h,$$
$$i, h, j, ... = 1, 2, ..., n.$$

Тут $\Gamma_{ij}^h, \overline{\Gamma}_{ij}^h$ – компоненти об'єктів зв'язності $V_n, \overline{V}_n$, відповідно; ψ_i, ϕ_i, q_i – деякі ковектори; «,» та «|» – знак коваріантної похідної в просторах $V_n, \overline{V}_n$, відповідно; дужками позначена операція симетрування.

Доведено

Теорема 1. *Для того, щоб узагальнено-рекурентний параболічний простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетрівіальне КГВ, необхідно і достатньо, щоб в ньому існував неособливий симетричний двічі коваріантний тензор a_{ij}, який задовольняє рівнянням*

$$a_{ij,k} = \lambda_\alpha F_i^\alpha g_{jk} + \lambda_\alpha F_j^\alpha g_{ik} + \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik}, \tag{1}$$

і

$$a_{i\alpha}F_j^\alpha = -a_{j\alpha}F_i^\alpha, \quad det||a_{ij}|| \neq 0 \tag{2}$$

при деякому ковекторі $\lambda_i \neq 0$.

Питання про існування КГВ простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) зводиться до дослідження диференціальних рівнянь (1) відносно вектора λ_i і тензора a_{ij}, який задовольняє (2).

Має місце

Теорема 2. *Для того, щоб псевдоріманoвий простір з інтегровною узагальнено-рекурентною параболічною структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав КГВ, необхідно і достатньо, щоб замкнена система диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку типу Коші відносно функцій $a_{ij}, \lambda_i, \overset{1}{\mu}, \overset{2}{\mu}$:*

$$a_{ij,k} = \lambda_\alpha F_i^\alpha g_{jk} + \lambda_\alpha F_j^\alpha g_{ik} + \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik},$$

$$\lambda_{i,l} = a_{\alpha\beta}S_{il}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha P_{il}^\alpha + \overset{1}{\mu}Q_{il} + \overset{2}{\mu}F_{il},$$

$$\overset{1}{\mu}_{,k} = a_{\alpha\beta}\widetilde{S}_k^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \widetilde{T}_k^\alpha + \overset{1}{\mu}\widetilde{Q}_k + \overset{2}{\mu}\widetilde{P}_k,$$

$$\overset{2}{\mu}_{,k} = a_{\alpha\beta}\tilde{\tilde{S}}_k^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \tilde{\tilde{T}}_k^\alpha + \overset{1}{\mu}\tilde{\tilde{Q}}_k + \overset{2}{\mu}\tilde{\tilde{P}}_k,$$

мала нетривіальний розв'язок $a_{ij}(x)$, $\lambda_i(x) \neq 0$, $\overset{1}{\mu}(x)$, $\overset{2}{\mu}(x)$, *який задовольняє умовам (2),* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\lambda_{\bar{i}}$ *– градієнтний вектор. Тут* S_{il}^{hj}, P_{il}^h, Q_{il}, $\widetilde{S}_k^{hj}$, $\widetilde{T}_k^h$, $\widetilde{Q}_k$, $\widetilde{P}_k$, $\tilde{\tilde{S}}_k^{hj}$, $\tilde{\tilde{T}}_k^h$, $\tilde{\tilde{Q}}_k$, $\tilde{\tilde{P}}_k$ *виражаються через внутрішні об'єкти простору* V_n.

Дана теорема дає змогу звести дослідження існування КГВ до системи, яка може бути розв'язана за допомогою регулярних методів теорії диференціальних рівнянь.

Теорема 3. *Для того, щоб псевдоріманoвий простір з інтегровною узагальнено-рекурентною параболічною структурою* (V_n, g_{ij}, F_i^h) *допускав КГВ, необхідно і достатньо, щоб система однорідних алгебраїчних рівнянь*

$$a_{\alpha\beta}S_{iljk}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha P_{iljk}^\alpha + \overset{1}{\mu}Q_{iljk} = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\beta}S_{ilk}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \overset{0}{T}{}_{ilk}^\alpha + \overset{1}{\mu}Q_{ilk} + \overset{2}{\mu}P_{ilk} &= 0,\\
a_{\alpha\beta}\overset{1}{S}{}_{ikl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \overset{1}{T}{}_{ikl}^\alpha + \overset{1}{\mu}\overset{1}{Q}_{ikl} + \overset{2}{\mu}\overset{1}{P}_{ikl} &= 0,\\
a_{\alpha\beta}\overset{2}{S}{}_{ikl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha \overset{2}{T}{}_{ikl}^\alpha + \overset{1}{\mu}\overset{2}{Q}_{ikl} + \overset{2}{\mu}\overset{2}{P}_{ikl} &= 0
\end{aligned}$$

та їх диференціальних продовжень в (V_n, g_{ij}, F_i^h) *мала нетривіальний розв'язок* $a_{ij}(x)$, $\lambda_i(x) \neq 0$, $\overset{1}{\mu}(x)$, $\overset{2}{\mu}(x)$, *який задовольняє умовам (2) і* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Тут S_{iljk}^{hr}, P_{iljk}^h, Q_{iljk}, S_{ilk}^{hr}, $\overset{0}{T}{}_{ilk}^h$, Q_{ilk}, P_{ilk}, $\overset{1}{S}{}_{ikl}^{hr}$, $\overset{1}{T}{}_{ikl}^h$, $\overset{1}{Q}_{ikl}$, $\overset{1}{P}_{ikl}$, $\overset{2}{S}{}_{ikl}^{hr}$, $\overset{2}{T}{}_{ikl}^h$, $\overset{2}{Q}_{ikl}$, $\overset{2}{P}_{ikl}$ *виражаються через внутрішні об'єкти простору* V_n.

Теореми 2 та 3 допомагають для будь-якого узагальнено-рекурентного параболічного простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) або знайти всі псевдоріманові простори, на які V_n допускає КГВ, або довести, що їх немає. Теореми 2 і 3 називають основними теоремами теорії КГВ.

1. Курбатова І. М., Пiструiл М. І. Квазі-геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. Proc. Intern. Geom. Center, 2020, 13, 3, 18 – 32.
2. Петров А. З. Моделирование физических полей. Гравитация и теория относительности, 1968, 4 – 5, 7 – 21.