Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

International Conference of Young Mathematicians

June 3–5, 2021

Kyiv, Ukraine

ABSTRACTS

Інститут математики НАН України

Міжнародна конференція молодих математиків

3–5 червня 2021 р.

Київ, Україна

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Київ — 2021

International Conference of Young Mathematicians. June 3 – 5, 2021, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2021. — 140 p.

Міжнародна конференція молодих математиків. 3 – 5 червня 2021 р., Київ, Україна.
Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2021. — 140 с.

Почесний програмний комітет

академік НАН України Микола Олексійович Перестюк

член-кореспондент НАН України Олександр Андрійович Бойчук

член-кореспондент НАН України Юрій Анатолійович Дрозд

член-кореспондент НАН України Анатолій Наумович Кочубей

член-кореспондент НАН України Сергій Іванович Максименко

член-кореспондент НАН України Анатолій Глібович Нікітін

Програмний комітет

Andrew Bruce

Victor Marx

Agnieszka Niemczynowicz

Michael Quellmalz

Yat-Hin Suen

Олена Атласюк

Олена Ванєєва

Наталія Василенко

Андрій Горюнов

Ірина Денега

Богдан Кліщук

Віталій Конаровський

Олександр Лагодзінський

Андріяна Плакош

Катерина Пожарська

Ірина Раєвська

Марина Раєвська

Ігор Райновський

Георгій Рябов

Дмитро Ситник

Юлія Сорока

Богдан Фещенко

Лілія Чернецька

Сергій Янченко

Організаційний комітет

Олена Атласюк, Людмила Вигівська, Богдан Кліщук, Ярослава Кореновська, Вікторія Кречко, Ірина Кузнєцова, Олександр Лагодзінський, Андріяна Плакош, Катерина Пожарська, Ігор Райновський, Георгій Рябов, Богдан Фещенко, Лілія Чернецька

CONTENTS

ЗМІСТ

Algebra, Geometry and Topology

Алгебра, геометрія і топологія

On dominions and closed varieties of semigroups

Shabnam Abbas

Department of Mathematics Aligarh Muslim University, Aligarh-202002, India

shabnamabbas.25@gmail.com

It is known that all subvarieties of variety of all semigroups are not absolutely closed. So, it is obvious to study which subvarieties of variety of all semigroups are closed in itself or closed in containing subvarieties. In this direction, Scheiblich [5] has shown that the variety of all normal bands is closed while Alam and Khan [2–4] have shown that the variety of left [right] regular bands, left [right] quasinormal bands and left [right] seminormal bands are closed. In [1], Ahanger and Shah have shown that the variety of left [right] regular bands is closed in the variety of all bands. In this paper, first we have shown that all the homotypical varieties defined by the identities $axy = xyax$ and $axy = xxya$ are closed. Further, we partially generalize a result of Isbell on semigroup dominions from the class of commutative semigroups to some classes of permutative semigroups by showing that dominions of such semigroups belongs to the same class.

Definition 1. A band S is said to be a normal band if S satisfies the identity $axya = ayxa$.

Definition 2. A band S is said to be a left [right] regular band if S satisfies the identity $ax = axa$ [$xa = axa$] for all $a, x \in S$.

Definition 3. A band S is said to be a left [right] quasinormal band if S satisfies the identity $axy = axay$ [$axy = ayxy$] for all $a, x, y \in S$.

Definition 4. A band S is said to be a left [right] seminormal band if S satisfies the identity $axy = axyay$ [$axy = ayaxy$] for all $a, x, y \in S$.

Definition 5. Let U be a subsemigroup of a semigroup S. We say that U dominates an element d of S if for every semigroup T and for all homomorphisms $\beta, \gamma : S \longrightarrow T$ and $u\beta{=}u\gamma$ for every u in U implies $d\beta{=}d\gamma$. The set of all elements of S dominated by U is called dominion of U in S and we denote it by $Dom(U, S)$.

Definition 6. A variety $\mathcal{V}$ of semigroups is said to be homotypical if it admits a homotypical identity.

Theorem 1. *Let $\mathcal{V}$ be a variety admitting an identity of the form [$axy = xyax$] is closed.*

Theorem 2. *Let $\mathcal{V}$ be a variety admitting an identity of the form [$axy = xxya$] is closed.*

Theorem 3. *Let U be an externally commutative subsemigroup of a right para externally commutative semigroup S. Then $Dom(U, S)$ is also externally commutative semigroup.*

1. Ahanger S. A., Shah A. H. Epimorphisms, dominions and varieties of bands. Semigroup Forum, 2020, 100, 641 – 650.
2. Alam N., Khan N. M. Special semigroup amalgams of quasi unitary subsemigroups and of quasi normal bands. Asian Eur. J. Math., 2013, 6, No. 7.
3. Alam N., Khan N. M. On closed and supersaturated semigroups. Commun. Algebra, 2014, 42, 3137 – 3146.
4. Alam N., Khan N. M. Epimorphism, closed and supersaturated semigroups. Malays. J. Math., 2015, 9 (3), 409 – 416.
5. Scheiblich H. E. On epis and dominions of bands. Semigroup Forum, 1976, 13, 103 – 114.

Pure injective dimensions relative to classes of finitely presented modules

Y. Alagöz
Siirt University, Department of Mathematics, Siirt, TURKEY
yusuf.alagoz@siirt.edu.tr

The notion of purity plays a significant role in module and ring theory. There are several generalizations of the notion of purity since it was presented in the literature (see, [1, 2, 5]). More generally, as [5], let $\mathscr{C}$ be a class of right R-modules. A short exact sequence $0 \to A \to B \to C \to 0$ of right R-modules is called $\mathscr{C}$-pure, if the natural homomorphism $\mathrm{Hom}(S, B) \to \mathrm{Hom}(S, C)$ is an epimorphism for each $S \in \mathscr{C}$. A right R-module A is called *$\mathscr{C}$-pure injective* in case A has injective property with respect to $\mathscr{C}$-pure exact sequences. In particular, if $\mathscr{C}$ is the class of all finitely presented right modules over R then we have the right Cohn's purity and pure-injectivity [5]. If $\mathscr{C}$ is the class of all right R-modules of the form R/aR for any $a \in R$ then we have the notion of RD-purity and RD-injectivity [3].

I will consider in this talk, $\mathscr{C}$-pure injective dimensions of modules and rings determined by the classes of finitely presented modules $\mathscr{C}$ including the correspondence between purities for left and right modules. Various examples and properties of this concept are studied. The relations between the $\mathscr{C}$-pure injective homological dimensions and other homological dimensions are also investigated. Using the concept of $\mathscr{C}$-pure injective dimensions of modules, we present some characterizations of $\mathscr{C}$-coherent rings, $\mathscr{C}$-semihereditary rings, and $\mathscr{C}$-regular rings.

1. Behboodi M., Ghorbani A., Moradzadeh-Dehkordi A., Shojaee S. H. On FC-Purity and I-Purity of Modules and Köthe Rings. Comm. in Algebra, 2014, 42, No. 5, 2061 – 2081.
2. Mao L. On mininjective and min-flat modules. Publ. Math. Debrecen, 2008, 72, No. 3 – 4, 347 – 358.
3. Mao L. Properties of RD-projective and RD-injective modules. Turk J. Math., 2011, 35, 187 – 205.
4. Mehdi A. R. Purity relative to classes of finitely presented modules. J. Algebra Appl., 2013, 12, No. 8, 1350050.
5. Warfield R. B. Purity and algebraic compactness for modules. Pacific J. Math., 1969, 28, 699 – 719.

On closedness of rectangular bands and left [right] normal bands

Rizwan Alam
Department of Mathematics, Aligarh Muslim University, Aligarh-202002, India
rizwanamuba@gmail.com

It is known that all subvarieties of variety of all semigroups are not absolutely closed. So, it is obvious to study which subvarieties of variety of all semigroups are closed in itself or closed in containing subvarieties. In this direction, Scheiblich [5] has shown that the variety of all normal bands is closed while Alam and Khan [2–4] have shown that the variety of left [right] regular bands, left [right] quasinormal bands and left [right] seminormal bands are closed. In [1], Ahanger and Shah have shown that the variety of left [right] regular bands is closed in the variety of all bands. In this paper we have shown that all subvarieties of the variety of all rectangular bands are closed in the variety of all left [right] semiregular bands. Further, we have shown that variety of right [left] normal bands are closed in some varieties of semigroups.

Definition 1. A band S is said to be a rectangular band if S satisfies the identity $a = axa$ for all $a,\ x \in S$.

Definition 2. A band S is said to be a left [right] semiregular band if S satisfies the identity $axy = axyayxy$ $[axy = axayaxy]$ for all $a,\ x,\ y \in S$.

Theorem 1. *Rectangular bands are closed in left [right] semiregular bands.*

1. Ahanger S. A., Shah A. H. Epimorphisms, dominions and varieties of bands. Semigroup Forum, 2020, 100, 641–650.
2. Alam N., Khan N. M. Special semigroup amalgams of quasi unitary subsemigroups and of quasi normal bands. Asian Eur. J. Math., 2013, 6, No. 1, 1350010, 7 pp.
3. Alam N., Khan N. M. On closed and supersaturated semigroups. Commun. Algebra, 2014, 42, 3137–3146.
4. Alam N., Khan N. M. Epimorphism, closed and supersaturated semigroups. Malays. J. Math., 2015, 9, No. 3, 409–416.
5. Scheiblich H. E. On epis and dominions of bands. Semigroup Forum, 1976, 13, 103–114.

Power series representing by posets

J. Arciniega-Nevárez[1], **E. Dolores-Cuenca**[2]
[1] División de Ingenierías, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato, Guanajuato, Gto., México
[2] NewSci Labs, Tallahassee, FL, United States
eric.rubiel@u.northwestern.edu

Consider the category of finite posets with a unique maximum and a unique minimum. In [1] we prove that two geometrically inspired operations on this category are transported to a labeling series. As a consequence we prove new identities of binomial coefficients. We provide an algorithm to determine if a power series is associated to a certain family of posets. We compute the number of labelings for a family of posets. We used homological algebra ideas and introduced a new kind of space between structured spaces and ringed spaces.

1. Arciniega-Nevarez J. A., Dolores-Cuenca E. Power series represented by posets. (arXiv:2105.06633).

On closed varieties of left [right] normal bands

Wajih Ashraf
Department of Mathematics, Aligarh Muslim University, Aligarh-202002, India
syedwajihashraf@gmail.com

It is known that all subvarieties of variety of all semigroups are not absolutely closed. So, it is obvious to study which subvarieties of variety of all semigroups are closed in itself or closed in containing subvarieties. In this direction, Scheiblich [6] has shown that the variety of all normal bands is closed while Alam and Khan [2–4] have shown that the variety of left [right] regular bands, left [right] quasinormal bands and left [right] seminormal bands are closed. In [1], Ahanger and Shah have shown that the variety of left [right] regular bands is closed in the variety of all bands. Higgins [5, Chapter 4] has shown that variety of right normal bands is not absolutely closed. So, it is worthy of attention to find out the subvarieties of varieties of all semigroups in which the varieties of left [right] normal bands are closed. In this paper, we have shown that the variety of left [right] normal bands are closed in some containing varieties of semigroups defined by the identities $axy = a^2yax$, $axy = aya^2x$, $axy = xa^3y$ and $axy = x^3ay$.

Some basic definitions are as follows.

- A band S is said to be a left [right] normal band if S satisfies the identity $axy = ayx$ [$axy = xay$] for all $a,\ x,\ y \in S$.
- A band S is said to be a normal band if S satisfies the identity $axya = ayxa$.
- A band S is said to be a left [right] regular band if S satisfies the identity $ax = axa$ [$xa = axa$] for all $a,\ x \in S$.
- A band S is said to be a left [right] quasinormal band if S satisfies the identity $axy = axay$ [$axy = ayxy$] for all $a,\ x,\ y \in S$.
- A band S is said to be a left [right] seminormal band if S satisfies the identity $axy = axyay$ [$axy = ayaxy$] for all $a,\ x,\ y \in S$.

Finally, we prove the following theorem.

Theorem 1. *The following varieties of semigroups*

- $\mathcal{V} = [axy = a^2yax]$;
- $\mathcal{V} = [axy = aya^2x]$;
- $\mathcal{V} = [axy = xa^3y]$;
- $\mathcal{V} = [axy = x^3ay]$

are closed.

1. Ahanger S. A., Shah A. H. Epimorphisms, dominions and varieties of bands. Semigroup Forum, 2020, 100, 641 – 650.
2. Alam N., Khan N. M. Special semigroup amalgams of quasi unitary subsemigroups and of quasi normal bands. Asian Eur. J. Math., 2013, 6, No. 7.
3. Alam N., Khan N. M. On closed and supersaturated semigroups. Commun. Algebra, 2014, 42, 3137 – 3146.
4. Alam N., Khan N. M. Epimorphism, closed and supersaturated semigroups. Malays. J. Math., 2015, 9 (3), 409 – 416.
5. Higgins P. M. Techniques of Semigroup Theory. — Oxford: Oxford University Press, 1992, 272 p.
6. Scheiblich H. E. On epis and dominions of bands. Semigroup Forum, 1976, 13, 103 – 114.

Locally-zero binary operations as elements of $\mathrm{Bin}(X)$

I. Bilyi, S. Kozerenko

National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine

illiabilyigo@gmail.com, kozerenkosergiy@ukr.net

Let X be a nonempty set. Denote by $\mathrm{Bin}(X)$ the collection of all binary operations on X. In [1] the binary operation $\square$ on $\mathrm{Bin}(X)$ was considered: for $\circ, * \in \mathrm{Bin}(X)$ put $a(\circ\square*)b = (a \circ b) * (b \circ a)$ for all $a, b \in X$. It can be proved that $\square$ is associative (see [1]).

Denote by $\circ_{lz}$ and $\circ_{rz}$ the *'left-zeroes' operation* (defined as $a \circ_{lz} b = a$ for all $a, b \in X$) and the *'right-zeroes' operation* (defined as $a \circ_{lz} b = b$ for all $a, b \in X$), respectively. It is easy to see that $\circ_{lz}$ is the neutral element for $\square$. An operation $\circ \in Bin(X)$ on X is called *locally-zero* if the restriction of $\circ$ on any two-element subset of X equals $\circ_{lz}$ or $\circ_{rz}$. Clearly, both $\circ_{lz}$ and $\circ_{rz}$ are locally-zero operations.

It was proved in [2] that $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$ lies in the center of the semigroup $(\mathrm{Bin}(X), \square)$ if and only if $\circ$ is a locally-zero operation. As a corollary, we obtain that the set of all locally-zero operations is closed under the $\square$.

With each locally-zero operation $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$ we naturally associate an (undirected) graph $G(\circ)$ on X defined as follows: $V(G(\circ)) = X$, $E(G(\circ)) = \{ab : \circ \text{ is left-zero on } \{a, b\}\}$. It is easy to see that this correspondence between locally-zero operations and graphs on X is bijective. Denote by $\overline{G}$ the complement of G and by $G \triangle H$ the symmetric difference of two graphs G, H.

Proposition 1. *For a pair of locally-zero operations* $\circ, * \in \mathrm{Bin}(X)$ *it holds* $G(\circ\square*) = \overline{G(\circ)\triangle G(*)}$.

It was also shown in [2] that a locally-zero operation $\circ$ is associative if and only if $\circ \in \{\circ_{lz}, \circ_{rz}\}$. In fact, it is possible to obtain a characterization of associative triples for such operations $\circ$ in terms of their graphs $G(\circ)$. For a graph G and $A \subset V(G)$ by $E_G(A)$ we denote the set of edges in G whose vertices lie in A.

Proposition 2. *Let* $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$ *be a locally-zero operation and* $a, b, c \in X$. *Then the triple* (a, b, c) *is* not *associative for* $\circ$ *if and only if* a, b, c *are pairwise distinct, and* $E_{G(\circ)}(\{a, b, c\}) = \{ac\}$ *or* $E_{G(\circ)}(\{a, b, c\}) = \{ab, bc\}$.

One can observe that $\circ\square\circ = \circ_{lz}$ for each locally-zero operation $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$. Hence, any such $\circ$ is invertible in $(\mathrm{Bin}(X), \square)$). Moreover, a locally-zero operation $\circ$ does not have other inverses under $\square$.

Proposition 3. *Let* $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$ *be a locally-zero operation and* $*$ *be its left or right inverse under* $\square$. *Then* $* = \circ$.

An operation $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$ is called *graph operation* if $a \circ b \in \{a, b\}$ for all $a, b \in X$. Trivially, each locally-zero operation is also a graph operation.

Theorem 1. *For a graph operation* $\circ \in \mathrm{Bin}(X)$ *the next conditions are equivalent:* (1) $\circ$ *is left-invertible under* $\square$; (2) $\circ$ *is right-invertible under* $\square$; (3) $\circ$ *is locally-zero.*

1. Kim H. S., Neggers J. The semigroups of binary systems and some perspectives. Bull. Korean Math. Soc., 2008, 45, No. 4, 651 – 661.
2. Fayoumi H. Locally-zero groupoids and the center of *Bin*(X). Comm. Korean Math. Soc., 2011, 26, 163 – 168.

On commensurators of groups in their Cayley graphs

I. V. Bondarenko, S. O. Doroshenko
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
ievgbond@gmail.com, svetlana_dor@ukr.net

Two subgroups H_1, H_2 of a group G are called commensurable if their intersection $H_1 \cap H_2$ has finite index in H_1 and H_2. The commensurator of a subgroup $H < G$ is the subgroup

$$Comm_G(H) = \{g \in G \mid \ gHg^{-1} \text{ and } H \text{ are commensurable}\}.$$

The commensurators play an important role in diverse areas of geometric group theory. In particular, deep results of Borel, Margulis and Mostow characterize the commensurators of lattices in semisimple Lie groups (see [1]).

We consider the commensurator of a group in the automorphism group of its Cayley graph. Let G be a group with a finite symmetric generating set S, and consider the associated Cayley graph $\Gamma = \Gamma(G, S)$. The group G acts on the Cayley graph Γ by automorphisms, and we consider G as a subgroup of $Aut(\Gamma)$. Let $Comm_\Gamma(G)$ be the commensurator of G in the group $Aut(\Gamma)$:

$$Comm_\Gamma(G) = \{\alpha \in Aut(\Gamma) \,|\, \alpha G \alpha^{-1} \cap G \text{ is of finite index in } \alpha G \alpha^{-1} \text{ and } G\}\,.$$

Since G acts regularly on Γ, we get exact factorization $Comm_\Gamma(G) = G \cdot Comm_{\Gamma_e}(G)$, where $Comm_{\Gamma_e}(G)$ consists of the automorphisms of the rooted Cayley graph Γ_e that belong to the commensurator of G.

We describe the commensurator $Comm_{\Gamma_e}(G)$ in terms of finite automata (or self-similar actions). Let us define an automaton structure $A_{G,S}$ on the group $Aut(\Gamma_e)$ over the alphabet S. The automaton $A_{G,S}$ has the set of states $Aut(\Gamma_e)$ and for every $\alpha \in Aut(\Gamma_e)$ and $s \in S$ we put an arrow

$$\alpha \xrightarrow{s|t} \beta, \quad \text{where } t = \alpha(s) \text{ and } \beta = (g_t)^{-1}\alpha g_s.$$

The automaton $A_{G,S}$ is invertible and generates a group isomorphic to $Aut(\Gamma_e)$; in other words, $A_{G,S}$ defines a faithful action of $Aut(\Gamma_e)$ on words over S. In general, not all elements of $Aut(\Gamma_e)$ act by finite automata, i.e., belong to the group $FAut(S)$ of finite automata over alphabet S. The next proposition relate finite automata and the commensurator.

Theorem 1. $Comm_{\Gamma_e}(G) = Aut(\Gamma_e) \cap FAut(S)$.

This result was inspired by the main result of [2], which connects the commensurator of a free group in the automorphism group of its Cayley graph and bireversible automata.

1. Drutu C., Kapovich M. Geometric Group Theory. — Providence: American Mathematical Society, 2018, 814 p.
2. Macedonska O., Nekrashevych V., Sushchanskij V. Commensurators of groups and reversible automata. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 2000, 12, 36 – 39.

Hyper BN-algebras: hyperstructure theory applied to BN-algebras

L. R. Cabardo, G. Petalcorin Jr.

MSU-ILigan Institute of Technology, Iligan City, Philippines

lysterrey.cabardo@g.msuiit.edu.ph, gaudencio.petalcorin@g.msuiit.edu.ph

In 1934, F. Marty [4] brought the concept of the algebraic hyperstructure theory to the world at the 8th Congress of Scandinavian Mathematicians. This is a generalization of the classical agebraic structure. Several applications of the hyperstructure theory were given by P. Corsini and V. Leoreanu [1]. Papers were also published on providing examples of hyperstructures in inheritance issues in genetics [2] and in the interaction of elementary particles in physics [3]. In this paper, we introduce the notion of hyper BN-algebras. A hyper BN-algebra is a set H together with a hyperoperation "$\circledast$" and a constant 0 such that for all $x,\ y,\ z \in H$, $x \ll x$, $x \circledast 0 = \{x\}$, and $(x \circledast y) \circledast z = (0 \circledast z) \circledast (y \circledast x)$, where $\ll$ is called the hyperorder on H and $x \ll y$ whenever $0 \in x \circledast y$. We show that hyper BN-algebras are a generalization of BN-algebras. We compare it to some of the other existing hyper algebras. We give some routine properties of hyper BN-algebra. Finally, we give a certain condition for when a hyper BN-algebra becomes a hyper B-algebra and a hypergroup.

1. Corsini P., Leoreanu V. Applications of Hyperstructure Theory (Advances in Mathematics, 5). — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, 334 p.
2. Davvaz B., Dehghan Heidari A., Heidari M. M. Inheritance Examples of Algebraic Hyperstructures. Information Sciences, 2013, 224, 180 – 187.
3. Dehghan Nezhad A., Nadjafikhah M., Moosavi Nejad S. M., Davvaz B. A Physical Example of Algebraic Structures: Leptons. Indian Journal of Physics, 2012, 86, No. 11, 1027 – 1032.
4. Marty F. Sur une Generalization de la Notion de Group, in Proceedings of the 8th Congres des Mathematiciens Scandinave, Stockholm, Sweden, 1934, 45 – 49.

On abnormal fuzzy subgroups

V. A. Chupordia
Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine
vchupordia@gmail.com

Let G be a group with a multiplicative binary operation. We recall that a fuzzy subset $\gamma : G \mapsto [0,1]$ is said to be a *fuzzy group* on G (see, for example, [1]), if it satisfies the following conditions: $\gamma(xy) \geq \gamma(x) \wedge \gamma(y)$, for all $x, y \in G$ and $\gamma(x^{-1}) \geq \gamma(x)$, for every $x \in G$.

Given μ and ν two fuzzy groups on G, we define the operation $\circ$ on them by

$$(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee_{u,v \in G, uv = x} (\mu(u) \wedge \nu(v)).$$

Let $Y \subseteq G$ and $a \in [0,1]$. Then we define the function $\chi(Y,a) : G \longmapsto [0,1]$ as follows $\chi(Y,a)(x) = a$ if $x \in Y$ and $\chi(Y,a)(x) = 0$ otherwise. Every fuzzy subgroup $\mu \in F(G)$ can be considered as a union of its fuzzy points $\chi(g, \mu(g))$, $g \in G$. Such "point approach" gave good results [2–5].

A subgroup D is *abnormal* in a group G, if for every element $x \in G$ we have $x \in \langle D, D^x \rangle$.

The following analogue of these concept can be obtained. Let $\mu, \gamma \in F(G)$ and $\mu \leq \gamma$. Then μ be called *abnormal* in γ if for all $g \in G$

$$\left\langle \mu, \chi(g^{-1}, \gamma(g)) \circ \gamma \circ \chi(g, \gamma(g)) \right\rangle (g) = \gamma(g).$$

Let $\mu \in F(G)$. For $a \in [0,1]$ we define a-level of μ as follows $L_a(\mu) = \{g \in G | \mu(g) \geq a\}$.

Let μ be a fuzzy subset on G. Then μ is a fuzzy subgroup if and only if all non-empty level subsets of μ are subgroups in G [1, Lemma 1.2.6.]. It was obtained the following analogue of this results for abnormal fuzzy subgroup.

Theorem 1. *Let G be a group $\mu \in F(G)$. Then μ is abnormal in $\chi(G,1)$ if and only if $\mu(e) = 1$ and all non-empty level subgroups of μ are abnormal in G.*

1. Mordeson J. N., Bhutani K. R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. — Springer: Berlin, 2005, 314 p.
2. Kurdachenko L. A., Grin K. O., Turbay N. A. On hypercentral fuzzy groups. Algebra Discrete Math., 2012, Vol. 13, No. 1, 92 – 106.
3. Kurdachenko L. A., Grin K. O., Turbay N. A. On normalizers in fuzzy groups. Algebra Discrete Math., 2013, No. 15, 23 – 36.
4. Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. On permutable fuzzy subgroups. Serdica Mathematical Journal., 2013, No. 39, 83 – 102.
5. Kurdachenko L. A., Chupordia V. A., Subbotin I. Ya., Grin K. O. On some problems of theory of fuzzy groups. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2013, 1, 14 – 18.

On the parallel surfaces to canal surfaces

T. Coşkun, G. Aydın Şekerci
Department of Mathematics, Süleyman Demirel University, Isparta, Turkey
tuncaycoskunsdu@gmail.com, gulsahaydin@sdu.edu.tr

A canal surface associated with a space curve $m(t)$, which is called the spine curve, is defined as a surface swept by a family of spheres of varying radius $r(t)$. To simplify the results, if the spine curve is a function of the $s-$arc parameter and the radius is a function of s, then a canal surface M is parametrized as follows using the Frenet frame $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ [1]:

$$C(s,v) = m(s) + r(s)(\sqrt{(1-r'(s))^2}\cos v\vec{n} + \sqrt{(1-r'(s)^2)}\sin v\vec{b} - r'(s)\vec{t}).$$

According to this, the parametrization of the canal surface M associated with the planar curve is given by

$$C(s,v) = p(s) + r(s)\left[\cos v\vec{n}(s) + \sin v\vec{b}(s)\right]$$

[2], [3].

In this study, we analyze the parallel surfaces to the canal surface with the planar curve. For this, we define the parallel surface to M with the parametrization

$$\begin{aligned} C^a(s,v) =& p(s) + r(s)\cos v\vec{n}(s) + r(s)\sin v\vec{b}(s) + \frac{a}{W}\Big[r(s)r'(s)\vec{t}(s) \\ & -r(s)\cos v(1-r(s)\kappa(s)\cos v)\vec{n}(s) - r(s)\sin v(1-r(s)\kappa(s)\cos v)\vec{b}(s)\Big] \end{aligned}$$

where $W^2 = r^2(s)(r'(s))^2 + r^2(s)(1-r(s)\kappa(s)\cos v)^2$ and $\kappa(s)$ is the curvature of $p(s)$ (see for details of parallel surfaces [4]). Then, we investigate the geometric properties of the parallel surface to canal surface. Firstly, we examine the necessary conditions in order that the parallel surfaces to canal surface are developable, minimal. When the canal surface is minimal or developable, we investigate the conditions that the parallel surfaces to this surface provide. Finally, we demonstrate that $v-$parameter curves of the parallel surfaces are geodesics if and only if the canal surface M is a pipe or a tube surface. Moreover, we obtain that the parallel surface to M has no $v-$ parameter curve to be asymptotic.

Acknowledgements. The first author is supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK).

1. Xu Z., Feng R., Sun J. G., Analytic and algebraic properties of canal surfaces. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 195, No. 1, 220 – 228.
2. Olah-Gal R., Pal L., Some notes on drawing twofolds in 4-dimensional Euclidean space. Acta Univ. Sapientiae Informatica, 2009, 1, No. 2, 125 – 134.
3. Öztürk G., Bulca B., Bayram B. K., Arslan K., On canal surfaces in E^3. Selçuk J. Appl. Math., 2010, 11, No. 2, 103 – 108.
4. Patriciu A. M., Some results on parallel surfaces in 3-dimensional Minkowski space R^3_1. Libertas Mathematica, 2011, 31, 163 – 168.

Weighted scalar curvature

Jialong Deng

Mathematisches Institut, Georg-August-Universität, Göttingen, Germany

jialong.deng@mathematik.uni-goettingen.de

Motivated by the importance of the Ricci Bakry-Emery curvature on the weighted Riemannian manifold $(M^n, g, e^{-f}d\mathrm{vol}_g)$, we define the weighted scalar curvature $Sc_{\alpha,\beta}$ on it by $Sc_{\alpha,\beta} := Sc_g + \alpha \triangle_g f - \beta \| \bigtriangledown_g f\|_g^2$ and then the results about the vanishing the harmonic spinor, f-minimal surface and weighted rigidity theorem are proved in [1].

1. Jialong Deng. Curvature-dimension condition meets Gromov's n-volumic scalar curvature. Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 2021, 17, No. 013, 20 p.

On holonomy of Weyl connections in Lorentzian signature

A. Dikarev
Masaryk University, Faculty of Science, Brno, Czech Republic
xdikareva@math.muni.cz

The holonomy group of a connection is an important invariant. This motivates the classification problem for holonomy groups. While classifications of connected holonomy groups for Riemannian and Lorentzian manifolds are known, only partial results are obtained for holonomy groups of pseudo-Riemannian manifolds of other signatures.

Of certain interests are Weyl manifolds (M, c, ∇), where c is a conformal class of pseudo-Riemannian metrics and ∇ is a torsion-free linear connection preserving c. There exists a classification of the connected holonomy groups of such connection in the Riemannian signature [3].

We obtained a complete classification of connected holonomy groups (equivalently, of holonomy algebras) of Weyl connections for a non-closed Weyl structures in the Lorentzian signature [1]. The main tool for that are Berger algebras. Berger algebras have the same algebraic properties as the holonomy algebras and they are candidates to the holonomy algebras.

Examples of Weyl connections with all possible holonomy algebras are constructed.

The results of this work were used for description of Lorentzian Weyl spaces admitting weighted parallel spinors [2].

1. Dikarev A. On holonomy of Weyl connections in Lorentzian signature. Differential Geometry and its Applications, 2021, 76, 101759.
2. Dikarev A., Galaev A. S. Parallel spinors on Lorentzian Weyl spaces. (arXiv:2007.07615v2) Monatshefte für Mathematik (in print).
3. Belgun F., Moroianu A. Weyl-parallel forms, conformal products and Einstein-Weyl manifolds. Asian J. Math., 2011, 15, No. 4, 499 – 520.

On generalization of the Hadamard-Lévy theorem

K. Eftekharinasab

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

kaveh@imath.kiev.ua

We generalize the global diffeomorphism theorem due to Hadamard and Lévy in the case of Banach spaces to Keller's C_c^1 mappings between Fréchet spaces. Our approach relies on path lifting property and local surjectivity.

The following lemma establishes the path lifting property of mappings.

Lemma 1. *Let $\varphi : E \to F$ be a Keller C_c^1 local diffeomorphim. Let $\gamma(s,t) : [0,1]\times[0,1] \to F$ be of class C_c^1 in t and s. If for $e \in E$ and $f \in F$, $f = \varphi(e)$ and $\gamma(s,0) = f$ for all $s \in [0,1]$. Then there exists a mapping $\Phi(s,t) : [0,1] \times [0,1] \to E$ of class C_c^1 in t and s such that $\Phi(s,t) = \varphi^{-1} \circ \gamma(s,t)$ and $\Phi(s,0) = e$ for all $s \in [0,1]$.*

The following theorem provides a sufficient for local surjectivity of mappings.

Proposition 1. *Let U be open in E, and $\varphi : U \subset E \to F$ a Keller C_c^1 mapping. If the derivative $\mathtt{D}\varphi(u_1)$ is surjective for some $u_1 \in U$, then φ is locally surjective in an open neighborhood of u_1. Furthermore, if $\mathtt{D}\varphi(u)$ is surjective for all $u \in U$, then φ is open.*

Let $\mathcal{B}$ be a compact bornology on a Fréchet space E. We endow the space of continuous linear mappings between E and F, $CL(E,F)$, with the $\mathcal{B}_E$-topology; this is a Hausdorff locally convex topology defined by the family of seminorms

$$\|L\|_{B,n} = \sup\{\|L(e)\|_{F,n} : e \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}_E, n \in \mathbb{N}.$$

Theorem 1. *Let $\varphi : E \to F$ be a Keller C_c^1 local diffeomorphim. Then φ is global diffeomorphim if $\|[\mathtt{D}\varphi(e)]^{-1}\|_{B,n} < \infty$ for all $B \in \mathcal{B}_F$, $n \in \mathbb{N}$, and $e \in E$.*

Deformations of circle-valued Morse functions on 2-torus

B. Feshchenko
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
fb@imath.kiev.ua

Circle-valued Morse functions are natural generalizations of (ordinary) Morse functions. They can be viewed as multi-valued Morse functions, their values is locally defined up to an additive integer. Therefore locally circle-valued Morse function can be viewed as Morse functions but global properties of such functions are different from real-valued case.

Let M be a smooth compact surface, and let P be either $\mathbb{R}$ or S^1. The group $\mathcal{D}(M)$ of diffeomorphisms of M acts from the right on the space of smooth maps $C^\infty(M,P)$ by the rule

$$\gamma : C^\infty(M,P) \times \mathcal{D}(M) \to C^\infty(M,P), \qquad \gamma(f,h) = f \circ h.$$

With respect to γ we denote by

$$\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \,|h \in \mathcal{D}(M)\}$$

the *orbit* of $f \in C^\infty(M,P)$. Endow strong Whitney C^∞-topologies on $C^\infty(M,P)$ and $\mathcal{D}(M)$; then for a map $f \in C^\infty(M,P)$ these topologies induce some topology on $\mathcal{O}(f)$. We denote by $\mathcal{O}_f(f)$ a connected component of $\mathcal{O}(f)$ containing f.

The homotopy type and an algebraic description of fundamental groups of orbits of (ordinary) Morse functions on T^2 is known. Generalizations of these results on circle-valued case will be presented in my talk.

On trans-Sasakian 3-manifolds as η-Einstein solitons

D. Ganguly[1], **S. Dey**[2], **A. Bhattacharyya**[1]

[1] Jadavpur University, Kolkata, India.

[2] Bidhan Chandra College, Asansol, India.

dipenganguly1@gmail.com, santu.mathju@gmail.com, bhattachar1968@yahoo.co.in

In recent days geometric flows have emerged as significant tools to study various geometrical structures and also in general relativistic perfect fluid spacetime. Einstein flows are evolutionary intrinsic geometric flows on smooth Riemannian manifold which deforms the underlying smooth Riemannian metric. Einstein solitons are generalizations of the Einstein metric and generate self-similar solutions to the Einstein flow. The present paper is to deliberate the class of 3-dimensional trans-Sasakian manifold admitting η-Einstein soliton which is a slight perturbation of the Einstein soliton by an 1-form. We have characterized η-Einstein solitons on 3-dimensional trans-Sasakian manifolds where the Ricci tensors are Codazzi type and cyclic parallel and also established relations for the soliton to be shrinking, steady or expanding. Symmetries are an important part of geometry and thus reveals the physics and here we have proved that a 3-dimensional ξ-Ricci semi-symmetric trans-Sasakian manifold admitting η-Einstein soliton is an Einstein manifold. We have also studied η-Einstein solitons on 3-dimensional trans-Sasakian manifolds satisfying some special curvature conditions and investigated the case when the potential vector field is torse-forming. Finally, an illustrative example of η-Einstein soliton on a 3-dimensional trans-Sasakian manifold has been constructed to verify our results.

Implicit difference equations over some residue class rings

M. V. Heneralov, A. L. Piven'
V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
me2001.com@gmail.com, aleksei.piven@karazin.ua

Let $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ be a residue class ring modulo $m \in \mathbb{N}$, a, b, f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ be given elements of this ring. Consider the following difference equation over the ring $\mathbb{Z}_m$:

$$bx_{n+1} = ax_n + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

If b is a non-invertible element of the ring $\mathbb{Z}_m$, the equation (1) is said to be *implicit*. The element $\tilde{a} \in \{0, \ldots, m-1\}$ is a representative of the corresponding residue class $a \in \mathbb{Z}_m$. Denote the following greatest common divisors: $d = \gcd\left(\tilde{a}, \tilde{b}, m\right)$, $d_1 = \gcd\left(\tilde{b}, m\right)$.

Theorem 1. *Let $m = pq$, where p, q are different primes. Then the following assertions hold.*

1. *The equation (1) has finitely many solutions if and only if $d = 1$. Moreover, the amount of these solutions is equal to $\dfrac{m}{d_1}$.*

2. *The equation (1) has no solutions if and only if $d \nmid \widetilde{f_n}$ for some $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

3. *The equation (1) has infinitely many solutions if and only if $d \neq 1$ and $d | \widetilde{f_n}$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Corollary 1. *Under the conditions of Theorem 1 the equation (1) has a unique solution if and only if $b = 0$ and a is an invertible element of the ring $\mathbb{Z}_m$.*

We consider the following initial condition for the equation (1) over $\mathbb{Z}_m$:

$$x_0 = y_0, \tag{2}$$

where y_0 is a given element of $\mathbb{Z}_m$.

Theorem 2. *Let the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then the following assertions hold.*

1. *The initial problem (1), (2) has a unique solution if and only if $d = 1$ and $\widetilde{ay_0 + f_0}$ is divisible by d_1.*

2. *The initial problem (1), (2) has no solutions if and only if either $d \nmid \widetilde{f_n}$ for some $n = 0, 1, 2, \ldots$, or $\widetilde{ay_0 + f_0}$ is not divisible by d_1.*

3. *The initial problem (1), (2) has infinitely many solutions if and only if $d \neq 1$, $\widetilde{ay_0 + f_0}$ is divisible by d_1 and $d | \widetilde{f_n}$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Achievement sets of multigeneralized Fibonacci sequence

D. M. Karvatsky

Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

d.karvatsky@gmail.com

Let $(x_n) = x_1, x_2, x_3, \ldots$ be a sequence of real numbers. Then $r \in R$ is achieved by (x_n) if there exists a subsequence (x_{n_k}) of some length $L \leq \infty$ such that $\sum_{k=1}^{L} x_{n_k}$ is absolutely convergent and converges to r. We adopt the convention that the empty subsequence sums to zero. We call the set of all real numbers achieved by (x_n) the *achievement set* of (x_n), and write it $AS(x_n)$ (see [2]).

On the other hand, if $M \in 2^N$, namely $M \subseteq N$, then

$$x = x\left(M\right) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n,$$

where

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{for} \ \ n \in M, \\ 0, & \text{for} \ \ n \notin M, \end{cases}$$

is called *incomplete sum* or *subsum* of series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. So the set of incomplete sums of the series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ and achievement set $ES(x_n)$ are equal.

It is well know from [1] that if E is the set of subsums of a positive term convergent series, then it is one of the following: a finite union of closed intervals, homeomorphic to the Cantor set or cantorval.

The problem of investigating topological, metrical and fractal properties of achievement sets of sequence (subsums of series) is extremely difficult and deep in historical terms [3].

We study the properties of $E(x_n)$ for

$$(x_n) = \alpha_1 u_1, \alpha_2 u_1, \alpha_1 u_2, \alpha_2 u_2, \alpha_1 u_3, \alpha_2 u_3, \ldots, \alpha_1 u_n, \alpha_2 u_n, \ldots,$$

where α_1, α_2 – fixed integer numbers, (u_n) is a Fibonacci generalized sequence satisfying following condition:

$$u_{n+2} = p u_{n+1} + s u_n.$$

1. Guthrie J. A., Nymann J. E. The topological structure of the set of subsums of an infinite series. Colloq. Math., 1988, 55, No. 2, 323 – 327.
2. Jones R. Achievement sets of sequences. The American Mathematical Monthly, 2011, 118, No. 6, 508 – 521.
3. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. — К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998, 296 с.

QA-deformation of surface with the given law of changing variation of the unit normal vector

Yuliia Khomych

Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine

khomych.yuliia@onu.edu.ua

In this paper it is considered quasiareal deformation of surfaces, which we will call also briefly QA-deformation. Quasiareal deformation is understood as an infinitesimal deformation of the first order with the given law of changing the element of area of a surface in Euclidean three-space.

Let $\overline{U}\left(x^1, x^2\right)$ be a field of velocities of the points of the surface $\overline{r}=\overline{r}\left(x^1, x^2\right)$ at the initial moment of the deformation, such that $\overline{U}=U^\alpha \overline{r}_\alpha+U^0 \overline{n}$, where $\overline{r_i}, \overline{n}$, $i=1,2$, are the basis vectors. The fundamental equations of the quasiareal infinitesimal deformation, which are expressed in terms of the components of the partial derivatives of the field $\overline{U}$, are derived in [1].

It has been established: in order that the field $\overline{U} \in C^1$ be a deforming field of the quasiareal infinitesimal deformation it is necessary and sufficient that the components U^α, U^0 satisfy the equation

$$U_{,\alpha}^\alpha-2 H U^0=-2 \mu, \tag{1}$$

where the function μ expresses the law of changing the element of area.

It is evident, that the class of the QA-deformation is very wide since one differential equation (1) contains four unknown functions. It is expedient to study such deformation under the additional geometrical or mechanical conditions. For example, for the surface of non-zero Gauss curvature ($K \neq 0$) on the condition that $\delta \overline{n}=-(U^\alpha b_{\alpha \beta}+U_\beta^0) \overline{r}^\beta$, where $U^\alpha b_{\alpha \beta}+U_\beta^0=\psi_\beta$ and ψ_β is the given field of the covariant vector under the quasiareal infinitesimal deformation we have additional partial differential equation of the second order with respect to the normal component of the deforming field

$$d^{\alpha \beta} U_{\alpha, \beta}^0-\frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha \beta} U_\beta^0+2 H U^0=d^{\alpha \beta} \psi_{\alpha, \beta}-\frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha \beta} \psi_\beta+2 \mu .$$

Let the functions U^0 and ψ satisfy the characteristic Weingarten equation

$$d^{\alpha \beta} U_{\alpha, \beta}^0-\frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha \beta} U_\beta^0+2 H U^0=0,\ d^{\alpha \beta} \psi_{\alpha, \beta}-\frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha \beta} \psi_\beta+2 H \psi=0 .$$

Then we get

$$\mu=H \psi .$$

The corresponding theorems have been formulated for the QA-deformation of the surfaces of non-zero Gauss and mean curvatures. QA-deformation in class of surfaces of constant mean curvature is discussed, for example, in paper [2] and deformations preserving Gauss curvature in paper [3].

1. Bezkorovaina L., Khomych Y. Quasiareal infinitesimal deformation of the surface in Euclidean three-space [in Ukrainian]. Proc. Intern. Geom. Center, 2014, 7, No. 2, 6 – 19.
2. Bezkorovaina L., Khomych Y. Quasiareal infinitesimal deformation in class of surfaces of constant mean curvature. International conference "Modern Advances in Geometry and Topology": Book of abstracts, Kharkiv: V. N. Karasin Kharkiv National University, 2016, 13 – 14.
3. Berres A., Hagen H., Hahmann S. Deformations preserving Gauss curvature Topological and Statistical Methods for Complex Data. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015, 143 – 163.

Some analogs of group-theoretical results for Poisson algebras

L. A. Kurdachenko[1], **A. A. Pypka**[1], **I. Ya. Subbotin**[2]
[1] Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine
[2] National University, Los Angeles, USA
lkurdachenko@gmail.com, sasha.pypka@gmail.com, isubboti@nu.edu

Let P be a vector space over a field F. Then P is called a *Poisson algebra*, if P has two additional binary operations $\cdot$ and $[-,-]$ such that the product $\cdot$ forms a commutative associative algebra, the bracket $[-,-]$ forms a Lie algebra, and $[-,-]$ acts as a derivation of the product $\cdot$, that is $[ab,c] = a[b,c] + b[a,c]$ for all $a,b,c \in P$.

A subset I of P is called an *ideal* of P if I is a subspace of P and $ab, [a,b] \in I$ for every $a \in I$ and $b \in P$. A Poisson algebra P is called *abelian*, if $[a,b] = 0$ for all $a,b \in P$. Define the *lower central series* of P

$$P = \gamma_1(P) \geqslant \gamma_2(P) \geqslant \ldots \gamma_\alpha(P) \geqslant \gamma_{\alpha+1}(P) \geqslant \ldots \gamma_\delta(P)$$

by the following rule: $\gamma_1(P) = P$, $\gamma_2(P) = [P,P]$, recursively $\gamma_{\alpha+1}(P) = [\gamma_\alpha(P), P]$ for all ordinals α, and $\gamma_\lambda(P) = \bigcap_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(P)$ for all limit ordinals λ. As usually, we say that a Poisson algebra P is *nilpotent*, if there exists a positive integer k such that $\gamma_k(P) = \langle 0 \rangle$. More precisely, P is said to be *nilpotent of nilpotency class* n if $\gamma_{n+1}(P) = \langle 0 \rangle$, but $\gamma_n(P) \neq \langle 0 \rangle$.

Put

$$\zeta(P) = \{z \in P |\ [z,a] = 0 \text{ for every } a \in P\}.$$

The subset $\zeta(P)$ is called the *center* of P. Starting from $\zeta(P)$ we can construct the *upper central series*

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(P) \leqslant \zeta_1(P) \leqslant \ldots \zeta_\alpha(P) \leqslant \zeta_{\alpha+1}(P) \leqslant \ldots \zeta_\eta(P)$$

of P by the following rule: $\zeta_1(P) = \zeta(P)$ is the center of P, recursively $\zeta_{\alpha+1}(P)/\zeta_\alpha(P) = \zeta(P/\zeta_\alpha(P))$ for all ordinals α, and $\zeta_\lambda(P) = \bigcup_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(P)$ for all limit ordinals λ.

The investigation of the relationships between the upper and lower central series is one of the classical problems in many algebraic structures (groups, Lie algebras, Lie rings, Leibniz algebras, modules and others). Therefore, it is natural to consider similar questions for Poisson algebras. We have obtained the following results.

Theorem 1. *Let P be a Poisson algebra over a field F. Suppose that $\zeta(P)$ has a finite codimension d. Then P includes an ideal K of finite dimension at most $\frac{1}{2}d(d^2-1)$ such that P/K is abelian.*

Theorem 2. *Let P be a Poisson algebra over a field F. Suppose that $\zeta_n(P)$ has a finite codimension d. Then P includes an ideal K of finite dimension at most $d^{n+1}(1+d)$ such that P/K is nilpotent of nilpotency class at most n.*

It is worth noting that Theorem 1 is an analogue of the so-called Schur's theorem for groups [1], and Theorem 2 is an analogue of classical Baer's theorem for groups [2].

1. Neumann B. H. Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. Lond. Math. Soc., 1951, 3, No. 1, 178 – 187.
2. Baer R. Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen. Math. Ann., 1952, 124, 161 – 177.

Realization of groups as fundamental groups of orbits of smooth functions

I. V. Kuznietsova, Yu. Yu. Soroka

Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

kuznietsova@imath.kiev.ua, sorokayulya15@gmail.com

Let M be a connected compact oriented surface and P be a real line $\mathbb{R}$ or a circle S^1. Note, that the group $\mathcal{D}(M)$ of diffeomorphisms of M naturally acts on the space of smooth functions $C^\infty(M, P)$ by the rule $(f, h) \longmapsto f \circ h$, where $h \in \mathcal{D}(M)$, $f \in C^\infty(M, P)$. For $f \in C^\infty(M, P)$ denote by $\mathcal{O}(f)$ the orbit of f under this action. Let $\mathcal{M}(M, P)$ be the set of isomorphisms clasess of fundamental groups $\pi_1\mathcal{O}(f)$ of orbits of Morse functions $f\colon M \to P$.

In articles [1] and [2] S. Maksymenko and B. Feshchenko introduced the sets of isomorphism classes $\mathcal{B}$ and $\mathcal{T}$ of groups generated by direct products and certain wreath products. They have proved that $\mathcal{M}(M, P) \subset \mathcal{B}$ if M is different from a 2-sphere S^2 and a 2-torus T^2, and $\mathcal{M}(T^2, \mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$. We have proved that these inclusions are equalities.

Denote by $\mathcal{F}(M, P)$ the space of smooth functions $f \in C^\infty(M, P)$ satisfying the following two conditions: (1) all critical points of f belong to the interior of M, and f takes constant values on each connected component of the boundary of M; (2) for each critical point z of f its germ at z is smoothly equivalent to some non-zero homogeneous polynomial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ of degree ≥ 2 without multiple factors. The set of all Morse maps from M to P is denoted by $Morse(M, P)$. For each map $f \in \mathcal{F}(M, P)$ we can define the (continuous) function ε_f from the set of connected components of the boundary ∂M to $\{\pm 1\}$, which takes the value -1 on the boundary component if f has a local minimum on this component, and $+1$ if f has a local maximum on this component. Let $\mathcal{E}_M$ be the set of all continuous functions $\varepsilon\colon \partial M \to \{\pm 1\}$. For $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ we denote by $\mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$ ($Morse(M, P, \varepsilon)$) subset of $\mathcal{F}(M, P)$ ($Morse(M, P)$) of functions f, for which $\varepsilon_f = \varepsilon$.

Denote

$\mathcal{G}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1\mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)\}$,

$\mathcal{M}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1\mathcal{O}(f, X) \mid f \in Morse(M, P, \varepsilon)\}$,

$\mathcal{G}^\Psi := \{\pi_1\mathcal{O}(f) \mid f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R}), \text{the Kronrod-Reeb graph } \Gamma_f \text{ is a tree}\}$,

$\mathcal{M}^\Psi := \{\pi_1\mathcal{O}(f) \mid f \in Morse(T^2, \mathbb{R}), \text{the Kronrod-Reeb graph } \Gamma_f \text{ is a tree}\}$,

$\mathcal{G}^O := \{\pi_1\mathcal{O}(f) \mid f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R}), \text{the Kronrod-Reeb graph } \Gamma_f \text{ has a unique cycle}\}$,

$\mathcal{M}^O := \{\pi_1\mathcal{O}(f) \mid f \in Morse(T^2, \mathbb{R}), \text{the Kronrod-Reeb graph } \Gamma_f \text{ has a unique cycle}\}$.

Theorem 1. *(1) Let M be a connected compact oriented surface distinct from 2-torus and 2-sphere, and let $\varepsilon\colon \partial M \to \{\pm 1\}$ be an arbitrary map from $\mathcal{E}_M$. Then if $M = S^1 \times [0, 1]$, and ε is constant, i.e takes the same value on components of the boundary ∂M, then $\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{B} \setminus \{1\}$, if $M = S^1 \times [0, 1]$ and ε takes different values on the components of the boundary ∂M or $M \neq S^1 \times [0, 1]$, then $\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{B}$.*

(2) There are equalities $\mathcal{M}^\Psi = \mathcal{G}^\Psi = \mathcal{T}, \mathcal{M}^O = \mathcal{G}^O = \mathcal{B}^O$, where $\mathcal{B}^O$ is a subclass of $\mathcal{B}$ consisting of groups $(A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$, where $A, B \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ and $n \geq 1$.

1. Maksymenko S. Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms. Topology Appl., 2020, 282, 107312, 48 pp.
2. Feshchenko B. Actions of finite groups and smooth functions on surfaces. Methods Funct. Anal. Topology, 2016, V. 29, No. 3, 210 – 219.

The bunch of varieties of mirror group isotopes

A. V. Lutsenko
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
lucenko.alla32@gmail.com

A *quasigroup* is an algebra $(Q;\cdot;\overset{\ell}{\cdot};\overset{r}{\cdot})$ with identities

$$(x\cdot y)\overset{\ell}{\cdot} y=x,\quad (x\overset{\ell}{\cdot} y)\cdot y=x,\quad x\overset{r}{\cdot}(x\cdot y)=y,\quad x\cdot(x\overset{r}{\cdot} y)=y. \tag{1}$$

A quasigroup $(Q;\cdot)$ is called [2] a *middle (left, right) mirror quasigroup*, if there exists a transformation φ (resp. δ, ξ) called a *middle(left, right) invertible function* such that for all x and y the following equality holds

$$\varphi(x)\cdot y=y\cdot x\quad (respectively, y\cdot yx=\delta(x);\quad xy\cdot y=\xi(x)).$$

Let $(Q;\circ)$ be a group isotope (i.e. it is isotopic to a group) and let $0\in Q$. Then

$$x\circ y=\alpha x+a+\beta y \tag{2}$$

is called a *0-canonical decomposition*, if $(Q;+,0)$ is a group and $\alpha 0=\beta 0=0$. An arbitrary element of a group isotope uniquely defines its canonical decomposition [1].

Theorem 1. *[3] Let $(Q;\cdot)$ be a group isotope and (2) be its canonical decomposition. Then the following statements hold:*

1) *$(Q;\cdot)$ is a middle mirror quasigroup with invertible function φ if and only if $\varphi=\iota$ and $(Q;\cdot)$ is commutative, i.e. $(Q;+)$ is abelian and $\beta=\alpha$;*

2) *$(Q;\cdot)$ is left mirror quasigroup with invertible function δ if and only if $\delta=\iota$ and $(Q;\cdot)$ is left symmetric, i.e. $(Q;+)$ is abelian and $\beta=-\iota$;*

3) *$(Q;\cdot)$ is right mirror quasigroup with invertible function ξ if and only if $\xi=\iota$ and $(Q;\cdot)$ is left symmetric, i.e. $(Q;+)$ is abelian and $\alpha=-\iota$.*

Example. Let $\mathbb{Z}_m$ be a ring modulo m. 1) $(\mathbb{Z}_7;\cdot)$ is a middle mirror quasigroup, where $x\cdot y:=4x+2+4y$;
2) $(\mathbb{Z}_5;*)$ is a left mirror quasigroup, where $x*y:=5x+3+4y$;
3) $(\mathbb{Z}_9;\circ)$ is right mirror quasigroup, where $x\circ y:=8x+1+3y$.

Proposition 1. *The bunch of varieties of mirror group isotopes consists of*

1) *the parastrophy orbit of one-sided mirror quasigroup varieties:* $\mathrm{Po}(\mathfrak{M})=\{\mathfrak{M},{}^{\ell}\mathfrak{M},{}^{r}\mathfrak{M}\}$*;*

2) *the parastrophy orbit of three-sided mirror quasigroup varieties:* $\mathrm{Po}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}\cap{}^{r}\mathfrak{M}\cap{}^{\ell}\mathfrak{M}$.

Acknowledgements The author is grateful to her scientific supervisor Prof. Fedir Sokhatsky for the design idea and the discussion of this abstract.

1. Sokhatsky F. M. On group isotopes II. Ukrainian Math. J., 1995, 47, No. 12, 1935 – 1948.
2. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. Classification of quasigroups according to directions of translations II. Comment. Math. Univ. Carolin. (to appear).
3. Lutsenko A. V. Classification of group isotopes according to their inverse properties. Applied problems of mechanics and mathematics, 2020, Vol. 13, 48 – 62.

About the second spectrum of a multiplication module

M. O. Maloid-Hliebova
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
marta.maloid-glebova@lnu.edu.ua

Let R be a associative ring and M an multiplicative R-module. If N is a subset of an R-module M we write $N \leq M$ to indicate that N is a submodule of M.

Definition 1. Proper submodule P of the left module M is called **prime submodule**, if quotient module M/P is prime left module, ie $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ for every nonzero submodule K/P of module M/P.

This definition can be found in such papers: [1, 2], and there are a lot of interesting results about such modules. Set of all prime submodules of module M is called prime spectrum of module M and is denoted by $Spec(M)$.

Definition 2. A non-zero submodule N of M is said to be second if for each $a \in R$, the homomorphism $N \to^a N$ is either surjective or zero [3]. More information about this class of modules can be found in [4].

Let $Spec^s(M)$ be the set of all second submodules of M. For any submodule N of M, $V^{s*}(N)$ is defined to be the set of all second submodules of M contained in N. Of course, $V^{s*}(0)$ is just the empty set and $V^{s*}(M)$ is $Spec^s(M)$. It is easy to see that for any family of submodules $N_i (i \in I)$ of M, $\cap_{i\in I} V^{s*}(N_i) = V^{s*}(\cap_{i\in I} N_i)$. Thus if $\zeta s{*}(M)$ denotes the collection of all subsets $V^{s*}(N)$ of $Spec^s(M)$, then $\zeta s{*}(M)$ contains the empty set and $Spec^s(M)$, and $\zeta s{*}(M)$ is closed under arbitrary intersections. In general $\zeta s{*}(M)$ is not closed under finite unions.

Definition 3. A module M is called a cotop module if $\zeta s{*}(M)$ is closed under finite unions. In this case, $\zeta s{*}(M)$ is called the quasi Zariski topology.

Theorem 1. *Let M be an R-module. If either R is an Artinian ring or M is a Noetherian module, then M has a minimal submodule if and only if M has a second submodule. In addition if M has a second submodule, then every second submodule of M is a semisimple submodule of M.*

Theorem 2. *Let R be a Noetherian ring and let M be a cotop R-module with finite length. Assume that the second quasi Zariski topology of M and the Zariski topology of M. Then M is a comultiplication R-module.*

1. Page S. Properties of quotient rings. Can. J. Math., 1972, 24, No. 6, 1122 – 1128.
2. Dauns J. Prime modules. Reine Angew. Math., 1978, 298, 156 – 181.
3. Yassemi S. The dual notion of prime submodules. Arch. Math (Brno), 2001, 37, 273 – 278.
4. Ansari-Toroghy H., Farshadifar F. On the dual notion of prime submodules. Algebra Colloq. (to appear).

Symmetric n-Homo-antisemigeneralized semiderivation of rings

Mehsin Jabel Atteya[1,2]

[1] Department of Mathematics, College of Education,
Al-Mustansiriyah University, Baghdad, IRAQ.

[2] School of Mathematics and Actuarial Science,
University of Leicester, Leicester, UK.

mjaas2@leicester.ac.uk

There are many applications of ring theory in other sciences. Some applications of (σ, τ)-derivations which can help to develop an approach to deformation of Lie algebras, and which have various applications in modelling quantum phenomena and in the analysis of complex systems. In 1983, J. Bergen [1] introduced the notion of semiderivations of a ring R which extends the notion of derivation of a ring R, as follows: $d : R \to R$ is a semiderivation of R if there exists a function $g : R \to R$ such that (i) $d(xy) = d(x)g(y) + xd(y) = d(x)y + g(x)d(y)$ for all $x, y \in R$ and (ii) $d(g(x)) = g(d(x))$ for all $x \in R$. We [2] introduced the definition of (σ, τ)-Homogeneralized derivations of semiprime rings with some results. Furthermore, in 2021, we [3] study the behaviour of skew-Homogeneralized derivations of rings and presented some results concerning that. The main purpose of this paper is to study the commutativity of a ring R which satisfied certain conditions via the definition of a symmetric n-Homo-antisemigeneralized semiderivation of rings. Throughout this paper, R always represents an associative ring. Recall that R is semiprime if $aRa = 0$ implies $a = 0$ and R is prime if $aRb = 0$ implies $a = 0$ or $b = 0$. An additive map $D\colon R \longrightarrow R$ is called a derivation if the Leibniz's rule $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ holds for all $x,\ y \in R$. Suppose n is a fixed positive integer and the additive mapping γ define as

$$\gamma(R)\colon \begin{cases} R^n \to R & \text{if } R = \prod_{i=1}^{n} x_i, \\ R \to R^n & \text{if } R = x, \end{cases}$$

where x is an arbitrary element of R. Similarly for the additive mapping D and the other mappings.

Definition 1. An n-additive mapping γ is called a symmetric n-Homo-antisemigeneralized semiderivation associated with a mapping g which acts as automorphism mapping of R such that $\gamma(x_1, x_2, ..., \grave{x}_i x_i, ..., x_n) = \gamma(x_1, x_2, ..., \grave{x}_i, ..., x_n)\gamma(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) + \gamma(x_1, x_2, ..., \grave{x}_i, ..., x_n)x_i + g(\grave{x}_i)D(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = \gamma(x_1, x_2, ..., \grave{x}_i, ..., x_n)\gamma(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) + (x_1, x_2, ..., \grave{x}_i, ..., x_n)\gamma(x_i) + D(\grave{x}_i)g(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ for all $\grave{x}_i, x_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$ with $\gamma(D(x_i)) = D(\gamma(x_i)), \gamma(g(x_i)) = g(\gamma(x_i))$ and $D(g(x_i)) = g(D(x_i))$ such that D is symmetric n-generalized semiderivation of R.

For more information about symmetric n-generalized semiderivation see [4].

1. Bergen J. Derivations in prime rings. Canad. Math. Bull., 1983, 26 (3), 267 − 270.
2. Mehsin J. A. (σ,τ)-Homogeneralized Derivations of Semiprime Rings, 13th Annual Binghamton University Graduate Conference in Algebra and Topology (BUGCAT), The State University of New York, USA, November 7–8, November 14–15, 2020.
3. Mehsin J. A. Skew-Homogeneralized Derivations of Rings, Math for All in New Orleans Conference, Tulane University Math Department, March 5–7, 2021.
4. Mehsin J. A. New types of permuting n-derivations with their applications to associative rings, Symmetry, 2020, 12, 46.

On differentially prime semiring ideals

I. O. Melnyk
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
ivannamelnyk@yahoo.com

Let S be a semiring. A map $\delta\colon S \to S$ is called a *derivation* on S [1] if $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a)\, b + a\delta(b)$ for any $a, b \in S$. A semiring S equipped with a derivation δ is called *differential* with respect to the derivation δ, or a δ-*semiring*, and denoted by (S, δ). Differential semirings were further studied in [2].

An ideal I of S is called *differential* if $\delta(I) \subseteq I$. A differential ideal P of S is called *differentially prime* if for differential ideals I and J of S, $IJ \subseteq P$ follows $I \subseteq P$ or $J \subseteq P$.

Theorem 1. *For a proper differential ideal Q of S, the following conditions are equivalent:*

1. *Q is differentially prime;*
2. *For any $a, b \in S$, $[a] \cdot [b] \subseteq Q$ follows $a \in Q$ or $b \in Q$;*
3. *For any $a, b \in S$, $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{(m)} S b^{(n)} \subseteq Q$ follows $a \in Q$ or $b \in Q$;*
4. *For any $a, b \in S$, $n \in \mathbb{N}$, $a S b^{(n)} \subseteq Q$ follows $a \in Q$ or $b \in Q$;*

1. Golan J. S. Semirings and their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999, 382 p.
2. Chandramouleeswaran M., Thiruveni V. On derivations of semirings. Advances in Algebra, 2010, 1, No. 1, 123 – 131.

On maps on triangular algebras

A. H. Mokhtari
Technical faculty of Ferdows, University of Birjand, Birjand, Iran
a.mokhtari@birjand.ac.ir

Consider $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are algebras and $\mathcal{M}$ is left $\mathcal{A}-$module and right $\mathcal{B}-$module. The set

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}\left\{\begin{bmatrix} a & m \\ 0 & b \end{bmatrix}, a \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}, b \in \mathcal{B}\right\}$$

by matrix multiplication and addition is an algebra that is called triangular algebras. A left $\mathcal{A}-$module M is called left faithful if $a\mathcal{M} = 0$ implies $a = 0$, and a right $\mathcal{B}-$module M is called right faithful if $\mathcal{M}b = 0$ implies $b = 0$, and when M is left $\mathcal{A}-$module and right $\mathcal{B}-$module, is called faithful when M is both left and right fathful. A linear map $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ is Lie centralizer if $\phi([x, y]) = [\phi(x), y]$ for each $x, y \in \mathcal{T}$.

In this talk, we characterize mapping that satisfy in the following relation

$$xy = 0 \Longrightarrow [\phi(x), y] = 0, \tag{$\bigstar$}$$

for each $x, y \in \mathcal{T}$. At last, we find sufficient condition under which each mapping $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ satisfying in ($\bigstar$), has the form $\phi(x) = \lambda x + \tau(x)$ for each $x \in \mathcal{T}$ where $\lambda \in Z(\mathcal{T})$ and τ is a linear map such that $\tau(\mathcal{T}) \subseteq Z(\mathcal{T})$

In the following, the center of a unital triangular algebra is specified.

Lemma 1. *Let* $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{M} \\ 0 & \mathcal{B} \end{bmatrix}$ *be a unital triangular algebra. Then*

$$Z(\mathcal{T}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a \in Z(\mathcal{A}), b \in Z(\mathcal{B}), am = mb, \forall m \in \mathcal{M}, \right\}.$$

Define two natural projections $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ and $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{G} \to \mathcal{B}$ by

$$\pi_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} a & m \\ n & b \end{bmatrix}\right) = a \quad \text{and} \quad \pi_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} a & m \\ n & b \end{bmatrix}\right) = b.$$

According to [2, Lemma 1], we have $\pi_{\mathcal{A}}(Z(\mathcal{G})) \subseteq Z(\mathcal{A})$ and $\pi_{\mathcal{B}}(Z(\mathcal{G})) \subseteq Z(\mathcal{B})$. In fact, $\pi_{\mathcal{A}}(Z(\mathcal{G}))$ is a subalgebra of $Z(\mathcal{A})$ and $\pi_{\mathcal{B}}(Z(\mathcal{G}))$ is a subalgebra of $Z(\mathcal{B})$.

Now, we give our main theorem that obtains the desired conditions.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M}$ be faithful bimodules in $\mathcal{T}$, and $\pi_{\mathcal{A}}(Z(\mathcal{T})) = Z(\mathcal{T})$ and $\pi_{\mathcal{B}}(Z(\mathcal{T})) = Z(\mathcal{T})$. Then the linear mapping $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ satisfies ($\bigstar$) if and only if $\Phi(X) = \lambda X + \mu(X)$ for any $X \in \mathcal{T}$, where $\lambda \in Z(\mathcal{G})$ and $\mu : \mathcal{T} \to Z(\mathcal{T})$ is a linear mapping in which $\mu([X, Y]) = 0$ for any $X, Y \in \mathcal{G}$ with $XY = 0$.*

1. Johnson B. E. An introduction to the theory of centralizers. Proc. London Math. Soc., 1964, 14, 299–320.
2. Krylov P. A. Isomorphism of generalized matrix rings. Algebra Logika, 2008, 47, 456–463.
3. Mokhtari A. H. Ebrahimi Vishki H. R. More on Lie derivations of generalized matrix algebras. Miskolc Math. Notes, 2018, 1, 385–396.

Homotopy types of striped surfaces

Nikitchenko Oleksii
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine
legionsun@gmail.com

Striped surface is a surface obtained by gluing open stripes with boundary intervals along some of those intervals. Every such surface is a non-compact two-dimensional manifold which can be non-connected, non-orientable and each connected component of its boundary is an open interval.

To each striped surface one can associate one-dimensional CW-complex (topological graph), which encodes combinatorial information about gluing of stripes. This graph can have loops and multiple edges. We prove that there is a homotopy equivalence between a striped surface and its graph. The proof is based on one of the generalization of Seifert-Van Kampen theorem for fundamental groupoids.

One of consequences is that homotopy type of corresponding graph is determined only by the striped surface itself and does not depend on a decomposition this surface into stripes (because surface can have many distinct decompositions into stripes).

On a generalization of the Tukia-Väisälä inequality

E. Petrov[1], **R. Salimov**[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk, Ukraine

[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

eugeniy.petrov@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

Considering η-quasisymmetric mappings between semimetric spaces with different triangle functions we have found a new estimation for the ratio of diameters of two subsets which are images of two bounded subsets. This result generalizes the inequality proved by P. Tukia and J. Väisälä in [1] for general metric spaces, see also Proposition 10.8 in [2] for the extended proof.

Let X be a nonempty set. Recall that a mapping $d\colon X\times X \to \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ is a *metric* if for all $x, y, z \in X$ the following axioms hold: (i) $(d(x,y)=0) \Leftrightarrow (x=y)$, (ii) $d(x,y)=d(y,x)$, (iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$. The pair (X,d) is called a *metric space*. If only axioms (i) and (ii) hold then the pair (X,d) is called a *semimetric space*.

Definition 1. Let (X,d), (Y,ρ) be semimetric spaces. We shall say that an embedding $f\colon X\to Y$ is *η-quasisymmetric* if there is a homeomorphism $\eta\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ so that

$$d(x,a) \leqslant t d(x,b) \ \text{ implies } \ \rho(f(x),f(a)) \leqslant \eta(t)\rho(f(x),f(b))$$

for all triples a, b, x of points in X and for all $t>0$.

A definition of a triangle function was introduced by M. Bessenyei and Z. Páles in [3].

Definition 2. Consider a semimetric space (X,d). We say that $\Phi\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ is a *triangle function* for d if Φ is symmetric and monotone increasing in both of its arguments, satisfies $\Phi(0,0)=0$ and, for all $x,y,z\in X$, the following generalized triangle inequality holds:

$$d(x,y) \leqslant \Phi(d(x,z), d(y,z)).$$

The most important triangle functions $\Phi(u,v)$ which generate well-known types of metrics and their generalizations are $u+v$ (metric), $K(u+v)$ (b-metric with $K \geqslant 1$), $\max\{u,v\}$ (ultrametric).

Theorem 1. *Let (X,d) and (Y,ρ) be semimetric spaces with continuous and strictly increasing in both of their arguments triangle functions Φ_1 and Φ_2, respectively. And let $f\colon X\to Y$ be η-quasisymmetric embedding. Then f maps bounded subpaces to bounded subspaces.*

Moreover, if $A\subseteq B\subseteq X$, $0<\operatorname{diam} A, \operatorname{diam} B<\infty$, then $\operatorname{diam} f(B)$ is finite,

$$\frac{1}{\eta\left(\frac{\operatorname{diam} B}{\operatorname{diam} A}\right)} \leqslant \frac{\operatorname{diam} f(A)}{\varphi_2^{-1}(\operatorname{diam} f(B))} \quad \text{and} \quad \frac{\operatorname{diam} f(A)}{\operatorname{diam} f(B)} \leqslant \eta\left(\frac{\operatorname{diam} A}{\varphi_1^{-1}(\operatorname{diam} B)}\right),$$

where $\varphi_1(t)=\Phi_1(t,t)$, $\varphi_2(t)=\Phi_2(t,t)$.

In particular, taking in this theorem $\Phi_1(u,v)=\Phi_2(u,v)=u+v$, we immediately obtain the Tukia-Väisälä inequality.

1. Tukia P., Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math., 1980, 5, 97 – 114.
2. Heinonen J. Lectures on analysis on metric spaces. — New York: Springer, 2001, 141 p.
3. Bessenyei M., Páles Z. A contraction principle in semimetric spaces. J. Nonlinear Convex Anal., 2017, 18, No. 3, 515 – 524.

Chains of subalgebras in contracted Lie algebras

D. R. Popovych
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
deviuss@gmail.com

Contractions are a kind of limiting processes that formally describe connections between algebraic structures underlying physical theories [1]. For example, the contraction of the Poincaré algebra to the Galilean algebra corresponds to the relation between relativistic and classical mechanics. The contractions of the Heisenberg algebras to the Abelian ones relate to a limit process from quantum mechanics to classical mechanics under $\hbar \to 0$. Despite the importance of this, it is unclear which properties and structures are preserved in some sense under contractions.

Contractions are considered for algebras over the complex or real field. A more general notion defined for an arbitrary algebraically closed field is the notion of degeneration of Lie algebras [2, 3].

A simple example of contractions to the Abelian algebra demonstrates that characteristic ideals and megaideals of an algebra do not follow the same pattern. Indeed, the center grows to encompass the entire algebra but the derivative algebra shrinks to zero. The subalgebra and ideal structure of Lie algebras is changed under contractions as well.

We show that at the same time certain properties of this structure are stable.

Theorem 1. *Suppose that a Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ is a (continuous or sequential) contraction of the Lie algebra $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$, and the algebra $\mathfrak{g}$ contains a chain of nested subalgebras*

$$\{0\} = \mathfrak{s}^0 \subset \mathfrak{s}^1 \subset \mathfrak{s}^2 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}^m \subset \mathfrak{s}^{m+1} = \mathfrak{g}.$$

Then the algebra $\mathfrak{g}_0$ contains a chain of nested subalgebras

$$\{0\} = \mathfrak{s}_0^0 \subset \mathfrak{s}_0^1 \subset \mathfrak{s}_0^2 \subset \cdots \subset \mathfrak{s}_0^m \subset \mathfrak{s}_0^{m+1} = \mathfrak{g}_0$$

such that

$$\dim \mathfrak{s}_0^a = \dim \mathfrak{s}^a \quad \text{and} \quad \mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^a \quad \text{under} \quad \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0, \quad a = 1, \ldots, m.$$

If $\mathfrak{s}^a$ is an ideal in $\mathfrak{s}^b$, $1 \leqslant a < b \leqslant m+1$, then $\mathfrak{s}_0^a$ can be chosen to be an ideal in $\mathfrak{s}_0^b$, and $\mathfrak{s}^b/\mathfrak{s}^a \to \mathfrak{s}_0^b/\mathfrak{s}_0^a$.

A number of necessary contraction criteria can be derived as simple consequences of Theorem 1. The properties of commutativity, nilpotency, solvability and unimodularity are stable under contractions. Hence $\mathfrak{s}_0^a$ inherits the respective properties of $\mathfrak{s}^a$.

Corollary 1. *The dimensions of the following objects do not decrease under contractions of Lie algebras:*

- *maximal Abelian subalgebras,*
- *maximal nilpotent subalgebras,*
- *maximal solvable subalgebras,*
- *maximal Abelian ideals,*
- *maximal nilpotent ideals (nilradicals),*
- *maximal solvable ideals (radicals).*

1. Nesterenko M., Popovych R. O. Contractions of low-dimensional Lie algebras. J. Math. Phys., 2006, 47, No. 12, 123515, 45 pp.
2. Gorbatsevich V. V., Onishchik A. L., Vinberg E. B. Lie groups and Lie algebras. III. Structure of Lie groups and Lie algebras. — Springer-Verlag, Berlin, 1997, 248 p.
3. Burde D. Degenerations of nilpotent Lie algebras. J. Lie Theory, 1999, 9, No. 1, 193–202.

Local nearrings on finite Abelian groups

I. Raievska, M. Raievska

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

raeirina@imath.kiev.ua, raemarina@imath.kiev.ua

The classification of all nearrings up to certain orders is an open problem. It requires extensive computations, and the most suitable platform for their implementation is the computational algebra system GAP [1]. The list of all local nearrings of order at most 31 can be extracted from the package “Sonata” [2] of GAP. The current version of the package “LocalNR” [3] (not yet redistributed with GAP) contains all local nearrings of order at most 361, except those of orders 32, 64, 128, 243 and 256. We have already calculated some classes of local nearrings of orders 32, 64 and 243.

Let $[n, i]$ be the i-th group of order n in the SmallGroups library in GAP. We denote by C_n the cyclic group of order n.

There exist 15 non-isomorphic groups of order $625 = 5^4$, of which 5 groups are Abelian.

IdGroup	Structure Description
[625, 1]	C_{625}
[625, 2]	$C_{25} \times C_{25}$
[625, 5]	$C_{125} \times C_5$
[625, 11]	$C_{25} \times C_5 \times C_5$
[625, 15]	$C_5 \times C_5 \times C_5 \times C_5$

Proposition 1. *Only the following groups can be the multiplicative groups of local nearrings on additive group* $[625, 11]$*:*

IdGroup	*Structure Description*	*Number of LNR*
[500, 8]	$((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	157
[500, 11]	$((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	?
[500, 13]	$C_4 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_5)$	> 351
[500, 17]	$((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	150
[500, 25]	$((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	10
[500, 37]	$C_5 \times C_5 \times (C_5 \rtimes C_4)$	> 15625
[500, 38]	$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_4)$	?
[500, 40]	$C_{20} \times C_5 \times C_5$	> 33
[500, 41]	$C_5 \times C_5 \times (C_5 \rtimes C_4)$	385
[500, 42]	$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_4)$	417
[500, 43]	$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_4)$	32
[500, 44]	$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_4)$	8

Acknowledgements

The work is part of research projects entitled “LocalNearRing” and “NearRingsWithIdentity”. The work has been performed under the Project HPC-EUROPA3 (INFRAIA-2016-1-730897), with the support of the EC Research Innovation Action under the H2020 Programme; in particular, the authors gratefully acknowledge the support of Dr. Alexander Konovalov of the School of Computer Science at the University of St Andrews and the computer resources and technical support provided by EPCC at the University of Edinburgh.

1. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.0, 2020, https://www.gap-system.org
2. Aichinger E., Binder F., Ecker J., Mayr P., Nöbauer C. SONATA — system of near-rings and their applications, GAP package, Version 2.8, 2015, http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/
3. Raievska, I., Raievska, M. and Sysak, Y. LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.3, 2021, GAP package, https://gap-packages.github.io/LocalNR

Darboux polynomials for derivations with a Jordan basis

M. S. Sydorov[1], **K. Ya. Sysak**[2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

[2] National Transport University, Kyiv, Ukraine

smsidorov95@gmail.com, sysakkya@gmail.com

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic 0 and $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ the polynomial ring over $\mathbb{K}$. A $\mathbb{K}$-derivation D of A is a $\mathbb{K}$-linear mapping $D\colon A \to A$ such that $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ for all $f,\ g \in A$. The Lie algebra $W_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ consists of all $\mathbb{K}$-derivations of the ring A. This Lie algebra is also a free module over the polynomial ring A. Therefore, for each subalgebra L of $W_n(\mathbb{K})$ one can define the rank $\mathrm{rk}_A L$ of L over A. Any derivation $D \in W_n(\mathbb{K})$ can be uniquely extended to a derivation of the field of rational functions $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$.

We consider metabelian subalgebras L of $W_n(\mathbb{K})$ such that $\mathrm{rk}_A L = 2$ and L is a semidirect sum of the form $\mathbb{K}\langle D\rangle \leftthreetimes I$, where I is an infinite dimensional ideal of L of codimension one in L. We assume that the linear operator $\mathrm{ad}D$ on the ideal I has a Jordan basis $\{T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots\}$ such that

$$[D, T_1] = \lambda T_1,\ \ldots,\ [D, T_i] = \lambda T_i + T_{i-1},\ i > 2,\ \lambda \in A.$$

Such Lie algebras appear naturally in the study of solvable subalgebras of $W_n(\mathbb{K})$ (see, for example, [2]).

Recall that a nonzero polynomial $a \in A$ is called a Darboux polynomial for a derivation D if $D(a) = \lambda a$ for some $\lambda \in A$. Such a polynomial λ is called a cofactor for D with respect to a. Some properties and applications of Darboux polynomials for derivations one can find in [1].

Theorem 1. *Let L be a subalgebra of $W_n(\mathbb{K})$ of the form $L = \mathbb{K}\langle D\rangle \leftthreetimes \mathbb{K}\langle T_1, \ldots, T_k, \ldots\rangle$ and $\{T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots\}$ a Jordan basis of the linear operator* $\mathrm{ad}D$ *with an eigenvalue $\lambda \in A$. Then the following statements hold:*

1) There exists a sequence of a rational functions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ from the field $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ such that $D(\varphi_1) = 1$, $D(\varphi_i) = \varphi_{i-1},\ i > 1$.

2) There exists a sequence of a Darboux polynomials $g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots$ for the derivation D with corresponding cofactors $\lambda,\ 2\lambda, \ldots, k\lambda, \ldots$.

Obtained results may be useful for studying solvable Lie subalgebras of $W_n(\mathbb{K})$ of rank 2 over R.

1. Nowicki A. Polynomial Derivations and their Rings of Constants. — Torun: Uniwersytet Mikolaja Kopernika, 1994, 170 p.
2. Petravchuk A., Sysak K. Solvable Lie algebras of derivations of rank one. Mohyla Mathematical Journal, 2019, 2, 6 – 10.

On the structure of some non-periodic groups whose subgroups of infinite special rank are transitively normal

T. V. Velychko

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine

etativ27@gmail.com

A group G has *finite special rank* r if every finitely generated subgroup of G is generated by at most r elements and r is the least integer with this property. If there is not such r, then we say that G has *infinite special rank*.

A subgroup H of a group G is said to be *transitively normal* in G if H is normal in every subgroup $K \geqslant H$ in which H is subnormal.

A group G is called *generalized radical* if G has an ascending series whose factors are locally nilpotent or locally finite. If G is a generalized radical group, then either a locally nilpotent radical of G is non-trivial or a locally finite radical of G is non-trivial. Therefore, a generalized radical group has an ascending series of normal subgroups whose factors are locally nilpotent or locally finite.

In [1], the study of some non-periodic groups in which every subgroup of infinite special rank is transitively normal was initiated. More precisely, the authors proved that if G is a non-periodic locally generalized radical group with this property and G includes an ascendant locally nilpotent subgroup of infinite special rank, then G is abelian. In [2], the structure of periodic soluble groups of infinite special rank with this property has been described. We continue to study such groups with some additional restrictions on the locally nilpotent radical.

Theorem 1. *Let G be a generalized radical non-abelian group of infinite special rank whose subgroups of infinite special rank are transitively normal. Suppose that $Tor(G) = \langle 1 \rangle$ and a locally nilpotent radical L of G is abelian. Then, the following assertions hold:*

(i) *L includes a G-invariant pure subgroup A, having a finite series*

$$\langle 1 \rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_j \leqslant A_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant A_n = A$$

of G-invariant pure subgroups whose factors A_{j+1}/A_j are G-chief and G-eccentric for all $j \in \{0, \ldots, n-1\}$;

(ii) *$G = AC$ for some subgroup C, so that $A \cap C = \langle 1 \rangle$ and every complement to A in G is conjugate to C;*

(iii) *$C = S \times T$ where S is a free abelian subgroup, having infinite 0-rank, and T is a finite abelian subgroup.*

1. Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Velychko T. V. On the non-periodic groups, whose subgroups of infinite special rank are transitively normal. Algebra Discrete Math., 2020, 29, No. 1, 74 – 84.
2. Semko N. N., Velychko T. V. On the groups whose subgroups of infinite special rank are transitively normal. Algebra Discrete Math., 2017, 24, No. 1, 34 – 45.

On the endomorphisms of some Leibniz algebras

V. S. Yashchuk
Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine
Viktoriia.S.Yashchuk@gmail.com

In this abstract we study the endomorphisms of infinite dimensional cyclic Leibniz algebra.

Let L be an algebra over a field F with the binary operations $+$ and $[,]$. Then L is called a *Leibniz algebra* (more precisely a *left Leibniz algebra*), if it satisfies the (left) Leibniz identity

$$[[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]] \text{ for all } a,b,c \in L.$$

Leibniz algebras appeared first in the paper of A. M. Bloh [1], but the term "Leibniz algebra" appears in the book of J.- L. Loday [2].

When studying Leibniz algebras, the information about the endomorphisms of a Leibniz algebra is quite useful.

Let L be a Leibniz algebra. As usual, a linear transformation of L is called *an endomorphism*, if $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ for all $a, b \in L$. Clearly a product of two endomorphisms of L is also an endomorphism, so that the set of all endomorphisms of L is a semigroup by its multiplication. We note that the sum of two endomorphisms is not necessarily an endomorphism, so we cannot talk about an endomorphism ring.

Here we will use the term semigroup for a set, having an associative binary operation. For a semigroup, having an identity element, we will use the term *monoid*. Clearly an identical permutation is an endomorphism of L, therefore the set $\mathbf{Lend}(L)$ of all endomorphisms of L is a monoid by a multiplication.

As usual, a bijective endomorphism of L is called *an automorphism* of L.

Theorem 1. *Let L be a cyclic infinite dimensional Leibniz algebra over a field F. Then the monoid $\mathbf{Lend}(L)$ of all endomorphisms of L is an union of an ideal S with zero multiplication and a submonoid $\mathbf{Mon}(L)$ of all monomorphisms of L. Furthermore, $\mathbf{Mon}(L)$ is a product of an abelian submonoid A and an abelian subgroup D, satisfying the following conditions:*

(i) $A \cap D = \langle 1 \rangle$;

(ii) $d^{-1}Ad = A$ *for each element* $d \in D$;

(iii) D *is isomorphic to a multiplicative group of a field* F;

(iv) A *is isomorphic to a submonoid of a polynomial ring* $F[X]$*, consisting of those polynomials whose free term is* 1*, in particular,* A *is a free abelian monoid.*

Corollary 1. *Let L be a cyclic infinite dimensional Leibniz algebra over a field F. Then the group of all automorphisms of L is isomorphic to a multiplicative group of a field F.*

The author is grateful to Prof. L. A. Kurdachenko for useful discussions.

1. Bloh A. M. On a generalization of the concept of Lie algebra [in Russian]. Doklady AN USSR, 1965, 165, 471 – 473 .
2. Loday J. L. Une version non commutative des algebres de Lie; les algebres de Leibniz. Enseign. Math., 1993, 39, 269 – 293.

Властивості слабко m-опуклих множин

Т. М. Осіпчук
Інститут математики НАН України, Київ
osipchuk@imath.kiev.ua

У роботі 4 вивчаються топологічні властивості класів узагальнено опуклих множин багатовимірного дійсного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, які називаються m-опуклими і слабко m-опуклими, $1 \leq m < n$. Ці поняття ввів Юрій Борисович Зелінський (див. 1, 2). Множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***m-опуклою***, якщо для кожної точки з доповнення цієї множини до всього простору існує m-вимірна площина, яка проходить через цю точку й не перетинає заданої множини. Відкрита множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***слабко m-опуклою***, якщо для кожної точки межі множини існує m-вимірна площина, яка проходить через цю точку й не перетинає заданої множини. Замкнена множина простору $\mathbb{R}^n$ називається ***слабко m-опуклою***, якщо вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин. Нехай $\mathbf{C^n_m}$ і $\mathbf{WC^n_m}$ — це класи m-опуклих і слабко m-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, відповідно. Існують слабко m-опуклі множини у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $1 \leq m < n$, які не m-опуклі, тобто клас множин $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$ не порожній.

Теорема 1. (3) *Відкрита множина класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ складається не менше ніж із трьох компонент зв'язності.*

У роботі 4 будуються приклади відкритої й замкненої множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$, $n \geq 2$, із трьома і більше компонентами зв'язності, а також встановлюється, що для компактних множин класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$, $n \geq 2$, у просторі $\mathbb{R}^n$, справедлива така ж оцінка знизу числа їх компонент зв'язності, як і у випадку відкритих множин.

Теорема 2. (4) *Довільна компактна множина класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ складається не менше ніж із трьох компонент зв'язності.*

Лема 1. (4) *Нехай $E^p \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, — це множина класу $\mathbf{WC^p_1} \setminus \mathbf{C^p_1}$. Тоді множина $E := E^p \times \mathbb{R}^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, належить класу $\mathbf{WC^n_{n-p+1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-p+1}}$.*

Для відкритих можин класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, де $1 \leq m < n-1$, оцінка знизу числа їх компонент зв'язності відмінна від тої, яка отримана в теоремі 1, що доводить така

Теорема 3. (4) *Існують області у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \leq m < n-1$.*

1. Зелинский Ю. Б. Многозначные отображения в анализе. — К.:Наукова думка, 1993, 264 с.
2. Зелинский Ю. Б., Момот И. В. О (n, m)-выпуклых множествах. Укр. мат. журн, 2001, 53, № 3, 422–427.
3. Дакхіл Х. К. Задачі про тінь та відображення постійної кратності. Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук, Інститут математики НАН України, Київ, 2017.
4. Осіпчук Т. М. Топологічні властивості слабко m-опуклих множин. Праці Ін-ту прикладної математики і механіки НАН України, 2020, 34, 73–82.

Про універсальну M-еквівалентність

Н. М. Пирч
Українська Академія Друкарства, Національний Університет
"Львівська Політехніка", Львів, Україна
pnazar@ukr.net, Nazar.M.Pyrch@lpnu.ua

Для топологічного простору X позначимо через $F(X)$ вільну топологічну простору X. Для підпростору $Y \subseteq X$ позначимо через $\langle Y \rangle$ підгрупу в $F(X)$, породжену множиною твірних Y. Під парою (X, Y) топологічних просторів ми будемо розуміти простір X і його підпростір Y.

Означення 1. Пари тихоновських топологічних просторів (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) називаються M-еквівалентними (позн.$(X_1, Y_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2)$), якщо існує топологічний ізоморфізм $i\colon F(X_1) \to F(X_2)$ такий, що $i(\langle Y_1 \rangle) = \langle Y_2 \rangle$.

Означення 2. Пари M-еквівалентних тихоновських топологічних просторів (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) назвемо універсально M-еквівалентними, (позн.$(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$) якщо довільний топологічний ізоморфізм $j\colon \langle Y_1 \rangle \to \langle Y_2 \rangle$ допускає продовження до топологічного ізоморфізму $i\colon F(X_1) \to F(X_2)$.

Означення 3. Скажемо, що пара (X, Y) є M-універсальною, якщо довільний топологічний автоморфізм $j\colon \langle Y \rangle \to \langle Y \rangle$ допускає продовження до топологічного автоморфізму $i\colon F(X) \to F(X)$.

Теорема 1. *Наступні умови є рівносильних для M-еквівалентними пари тихоновських топологічних просторів (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2):*
1) пари (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) є універсально M-еквівалентними;
2) пари (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) M-еквівалентними і пара (X_1, Y_1) є M-універсальною.

Наслідок 1. *Властивість бути M-універсальною парою зберігається відношенням M-еквівалентності.*

Означення 4. Підпростір Y топологічного простору X називається G-ретрактом простору X, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$ з простору Y у довільну топологічну групу H допускає неперервне продовження на X.

Твердження 1. *Якщо Y підпростір є G-ретрактом тихоновського простору X, то пара (X, Y) є M-універсальною.*

Означення 5. Підпростір Y топологічного простору X називається P-вкладеним у X, якщо довільна неперервна псевдометрика задана на Y, продовжується до неперервної псевдометрики на X.

Твердження 2. *Якщо пари (X, Y) і (Y, Z) M-універсальними, а підпростір Y є P-вкладеним у X, то пара (X, Z) є M-універсальною.*

Наслідок 2. *Якщо $(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$, $(Y_1, Z_1) \overset{uM}{\sim} (Y_2, Z_2)$, а підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i $(i = 1, 2)$, то $(X_1, Z_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Z_2)$.*

Наслідок 3. *Якщо $(X_1, Y_1) \overset{uM}{\sim} (X_2, Y_2)$, $(Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (Y_2, Z_2)$, а підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i $(i = 1, 2)$, то $(X_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Z_2)$.*

Черніківські 2-групи з кляйнівською верхівкою і цілком розкладними базами

А. І. Плакош

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

andrianaplakoshmail@gmail.com

Це спільна робота з Ю. А. Дроздом (див. [1]).

Нагадаємо, що *черніківською групою* зветься група, в якій є нормальна підгрупа скінченного індексу, яка є прямим добутком скінченного числа квазіциклічних груп (або груп типу (p^∞)). Ця підгрупа зветься *базою*, а факторгрупа — *верхівкою* черніківської групи.

Ми розглядаємо випадок, коли верхівка — *четверна група Кляйна* $H = \langle\, a, b \mid a^2 = b^2 = 1,\ ab = ba \,\rangle$, а база M — *цілком звідна*, тобто є прямою сумою інваріантних підгруп, кожна з яких є квазіциклічною 2-групою. Тоді $M \simeq \bigoplus_{uv} m_{uv} L_{uv}$ $(u, v \in \{+, -\})$, де L_{uv} — квазіциклічна група, в якій a діє, як $u1$, а b — як $v1$ (тобто u, v задають знаки при $ax = \pm x$ та $bx = \pm x$, де $x \in L_{uv}$). Когомології цих модулів обчислені в [2] у термінах резольвенти, побудованої в [3].

Ми визначаємо елементи $\mathbf{h}_{uv} \in H^2(H, M)$ в такий спосіб, що кожен клас когомологій переводиться у якийсь $\mathbf{h}_{uv}$ автоморфізмами бази M, і даємо повний опис черніківських груп з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою. Саме, за набором $\mathsf{H} = \{\, m_{uv}, \mathbf{h}_{uv} \mid u, v \in \{+, -\} \,\}$ явно будуються елементи бази $\alpha(\mathsf{H}), \beta(\mathsf{H}), \gamma(\mathsf{H})$ і доводиться наступний результат.

Теорема 1. *Для кожного набору $\mathsf{H} = \{\, m_{uv}, \mathbf{h}_{uv} \mid u, v \in \{+, -\} \,\}$ визначимо групу $G(\mathsf{H})$ як таку, що породжується групою $M = \bigoplus_{uv} m_{uv} L_{uv}$ та елементами $\bar{a}, \bar{b}$ такими, що $\bar{a} x \bar{a}^{-1} = ax$ і $\bar{b} x \bar{b}^{-1} = bx$ для всіх $x \in M$, $\bar{a}^2 = \alpha(\mathsf{H})$, $\bar{b}^2 = \beta(\mathsf{H})$ і $[\bar{a}, \bar{b}] = \eta(\mathsf{H})$.*

1. *Група $G(\mathsf{H})$ є черніківською групою з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою.*
2. *Кожна черніківська група G з кляйнівською верхівкою і цілком розкладною базою ізоморфна деякій групі $G(\mathsf{H})$, де H — канонічний набір, визначений однозначно групою G.*

1. Дрозд Ю. А., Плакош А. І. Черніківські 2-групи з кляйнівською верхівкою і цілком звідними базами. Укр. мат. журн. (у друці).
2. Плакош А. І., Шапочка І. В. Про когомології четверної групи Клейна. Наук. вісник Ужгород. ун-ту, 2017, 30, №1, 95 – 102.
3. Drozd Yu., Plakosh A. Cohomologies of finite abelian groups. Algebra Discrete Math., 2017, 24, No. 1, 144 – 157.

Differential Equations and Mathematical Physics

Диференціальні рівняння і математична фізика

On linear generic boundary-value problems for differential systems in Sobolev spaces

Olena Atlasiuk

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

For the systems of ordinary differential equations of an arbitrary order on a compact interval, we study a character of solvability of the most general linear boundary-value problems in the Sobolev spaces W_p^n, with $n \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p \leq \infty$. We find the indices of these Fredholm problems and obtain a criterion of their well-posedness. Each of these boundary-value problems relates to a certain rectangular numerical characteristic matrix with kernel and cokernel of the same dimension as the kernel and cokernel of the boundary-value problem. The condition for the sequence of characteristic matrices to converge is found. We obtain a constructive criterion under which the solutions to these problems depend continuously on the small parameter ε at $\varepsilon = 0$, and find the degree of convergence of the solutions. Also applications of these results to multipoint boundary-value problems are obtained.

These results are given in [1 – 3]. In the case of differential equations of the first order, similar results are proved in the works [4 – 6].

1. Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces. Reports Nac. Acad. Nauk Ukr., 2019, No. 11, 3 – 7.
2. Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces. Reports Nac. Acad. Nauk Ukr., 2020, No. 6, 3 – 6.
3. Atlasiuk O. M. Limit theorems for the solutions of multipoint boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukrainian Math. J., 2021, 72, No. 8, 1175 – 1184.
4. Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. Ukrainian Math. J., 2019, 70, No. 10, 1526 – 1537.
5. Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukrainian Math. J., 2019, 70, No. 11, 1677 – 1687.
6. Atlasiuk O. M. Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces. Journal of Mathematical Sciences., 2020, 247, No. 2, 238 – 247.

Dichotomy and bounded solutions of dynamical systems in the Hilbert and Banach spaces

Bihun D., O.Pokutnyi

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Ukraine

dmytrobigun94@gmail.com, lenasas@gmail.com

For general discrete dynamics on Banach and Hilbert spaces, we specify necessary and sufficient conditions of the existence of bounded solutions under the assumption that the homogeneous difference equation admits a discrete dichotomy on the semi-axes. We consider the so-called resonance (critical) case when the uniqueness of a solution is disturbed. We show that admissibility can be reformulated in terms of generalized or pseudoinvertibility. As application, we consider the case when the corresponding dynamical system is e-trichotomy.

The main object of the report is the following operator equation in the Banach space

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

where $A_n : B \to B$ is a set of bounded operators, from the Banach space B into itself. Assume that

$$A = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{L}(B)), h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, B).$$

It means the following

$$|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||A_n|| < +\infty, |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||h_n|| < +\infty.$$

We give the conditions for the existence of bounded solutions of the equation (1) under the condition that the following homogeneous equations and exponential dichotomy on the semi-axes are fulfilled

$$x_{n+1} = A_n x_n \tag{2}$$

Acknowledgments. The authors have received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation program under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement No 873071.

1. Boichuk A.A. Solutions of linear and nonlinear difference equations bounded on the whole line. Nonlinear Oscillations, 2001, 4, No. 1, 16 – 27.
2. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems, 2nd edition — Berlin: De Gruyter, 2016, 296 pp.

The Lie symmetry approach on (1+2)-dimensional financial models

K. Charalambous[1,2], **S. Kontogiorgis**[1], **C. Sophocleous**[1]

[1] Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, Nicosia, Cyprus

[2] Department of Computer Science, University of Nicosia, Nicosia, Cyprus

charalambous.kyriakos@ucy.ac.cy, kontogiorgis.stavros@gmail.com, christod@ucy.ac.cy

We consider a class of nonlinear (1+2) partial differential equations which generalizes a number of models which appear in financial mathematics. These models are subject to specific terminal conditions. Lie symmetries are used to construct two successive mappings that reduce the problems into problems with new governing equations being ordinary differential equations. The same analysis is applied to general terminal conditions. In most cases, the first reduction results to linearizable equations. We discuss linearization for a general class which includes these reduced equations.

Qualitative analysis of nonautonomous degenerate differential equations and nonlinear electrical circuits

M. S. Filipkovska

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

filipkovskaya@ilt.kharkov.ua

In the present work, an implicit differential equation of the form

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \qquad t \geq t_+, \tag{1}$$

where $t_+ \geq 0$, $f\colon [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $A, B\colon [t_+, \infty) \to L(\mathbb{R}^n)$, is studied. The initial condition is given by $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in [t_+, \infty)$). We do not require the operator $A(t)$ to be nondegenerate. Thus, in the general case, the operator $A(t)$ is degenerate and therefore the equation (1) is called a degenerate differential equation (DE). It is also called a differential-algebraic equation (DAE) or descriptor system. The operator $B(t)$ can also be degenerate. Since $A(t)$, $B(t)$ are time-varying, the degenerate DE (1) is called nonautonomous (or time-varying). It is assumed that the pencil $\lambda A(t) + B(t)$ (λ is a complex parameter) which corresponds to the linear part of (1) is a regular pencil of index not higher than 1, and A, $B \in C^1([t_+, \infty), L(\mathbb{R}^n))$. A function $x \in C([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$ is said to be a solution of (1) on $[t_0, t_1)$ ($[t_0, t_1) \subseteq [t_+, \infty)$) if the function $A(t)x(t)$ is continuously differentiable on $[t_0, t_1)$ and $x(t)$ satisfies (1) on $[t_0, t_1)$. We also consider the implicit DE $A(t)\dfrac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) = f(t, x(t))$ for which a solution $x(t)$ has to be continuously differentiable on $[t_0, t_1)$. For the nonautonomous degenerate DEs we obtain conditions of the existence and uniqueness of global solutions, the Lagrange stability (the boundedness of every solutions), the dissipativity (the ultimate boundedness of solutions) and the Lagrange instability (solutions have finite escape time) [1, 2]. Also, we obtain conditions of the Lyapunov stability, asymptotic stability, complete stability (the asymptotic stability in the large) and the Lyapunov instability [1, 3]. The Lagrange stability (the dissipativity) of a degenerate DE means the existence of global solutions for all consistent initial values, and the boundedness (the ultimate boundedness) of all solutions. Thus, in contrast to the Lyapunov stability, the Lagrange stability and the dissipativity of a degenerate DE can be viewed, in a certain sense, as the stability of the entire equation (i.e., the stability of all its solutions), not just of a separate solution analyzed for stability. It is known that the dynamics of electrical circuits is modeled using systems of differential and algebraic equations, which in a vector form have the form of degenerate DEs (DAEs). Also, degenerate DEs (DAEs) are used in modeling the kinetics of chemical reactions and the dynamics of robotic systems, neural networks and other objects and processes. We study the global dynamics of mathematical models (which are considered in [1,3]) for electrical circuits with nonlinear and time-varying elements.

1. Filipkovska (Filipkovskaya) M. S. Global boundedness and stability of solutions of nonautonomous degenerate differential equations. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2020, 46, No. 2, 243 – 271.
2. Filipkovskaya M. S. Global solvability of time-varying semilinear differential-algebraic equations, boundedness and stability of their solutions. I. Differential Equations, 2021, 57, No. 1, 19 – 40.
3. Filipkovskaya M. S. Global solvability of time-varying semilinear differential-algebraic equations, boundedness and stability of their solutions. II. Differential Equations, 2021, 57, No. 2, 196 – 209.

Non-homogeneous implicit linear differential equation over the ring of formal power series

A. Goncharuk, S. Gefter
V.N.Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
angoncharuk@ukr.net, gefter@karazin.ua

Consider the linear differential equation with constant real coefficients

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x). \tag{1}$$

It is known (see [1, §5, 22.2]), that the sum of the series

$$w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f^{(i)}(x), \tag{2}$$

where c_i are the coefficients, which can be found from the equality

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots,$$

is one of the solutions of this non-homogeneous equation if some convergence conditions hold.

Let K be an integral domain, $a_0, \ldots, a_m \in K$ and $f(x) \in K[[x]]$. Consider a problem of finding the series $w(x) \in K[[x]]$, which satisfied the differential equation (1).

If $f(x)$ is a polynomial, then this sum (2) is well-defined and the following theorem holds.

Theorem 1. *Suppose a_0 is invertible, then the equation (1) has a solution from $K[x]$ if and only if $f(x)$ is a polynomial. This solution is unique and has the form (2).*

If $f(x)$ is a formal power series, but not a polynomial, the sum (2) does not converges with respect to the Krull topology. By previous theorem, the equation in this case has no polynomial solution, but it still can has a solution from $K[[x]]$. The following theorem gives us a sufficient conditions for existing and uniqueness of the solution from $K[[x]]$.

Theorem 2. *Suppose K is a valuation ring of a complete field with a non-Archimedean valuation $|\cdot|$. If $|a_0| = 1$ and $|a_i| < 1$ for any $1 \le i \le m$, then the series (2) converges with respect to the coefficient-wise topology and the sum of this series is a unique solution of the equation (1) from $K[[x]]$.*

The important example is a formal power series with integer coefficients.

Theorem 3. *Suppose $a_0, \ldots, a_m$ are integer. Then for any prime p, that is not a divisor of a_0, the equation (1) has a unique solution from $\mathbb{Z}_p[[x]]$, where $\mathbb{Z}_p$ is a ring of p-adic integers.*

The research was supported by the National Research Foundation of Ukraine funded by Ukrainian State budget in frames of project 2020.02/0096 "Operators in infinite-dimensional spaces: the interplay between geometry, algebra and topology"

1. Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, I. — Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1979, 246 pp.

Symmetries of (1+2)-dimensional Schrödinger-Pauli equation for charged particles

S. Dm. Koval

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnical Institute", Kyiv, Ukraine

koval.srh@gmail.com

In this work we carried out group classification of scalar, vector and matrix potentials of (2+1)-dimensional Schrödinger-Pauli equation. Fourteen inequivalent potentials together with correspondent symmetry algebras were found.

Generic form of the equation:

$$(i\partial_t - H)\psi(x, y) = 0, \tag{1}$$

where H is the corresponding hamiltonian, which we present in the following form:

$$H = \frac{1}{2}\pi_a\pi_a + V, \tag{2}$$

where

$$\pi_a = p_a - eA^a,\ p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},\ \mathbf{x} = (x, y). \tag{3}$$

A^a are components of the vector-potential of the electromagnetic field.

In contrast to the ordinary Schrödinger equation the potential $V(x)$ could be expand via Pauli matrice [1]:

$$V(\mathbf{x}) = A^0 + \sigma_a V^a. \tag{4}$$

Considering gauge transformation we can set the hamiltonian in the next form:

$$H = \frac{1}{2}p_a p_a - \frac{1}{2}\Big(\{A^1, p_1\} + \{A^2, p_2\}\Big) + V, \tag{5}$$

where

$$V = A^0 + \frac{1}{2}\Big((A^1)^2 + (A^2)^2\Big) + \sigma_a V^a. \tag{6}$$

Carrying out the simplified version of Lie approach, applicable to the linear equation, all symmetries of the equation (1) with hamiltonian in the form (5) were classified up to the equivalence group.

Acknowledgements. Author expresses deepest gratitude to the supervisor, Prof. Anatoly Nikitin and to Prof. Roman O. Popovych for useful discussions.

1. Nikitin A. G. Symmetries of the Schrödinger-Pauli equation for neutral particles. (arxiv.org:2004.08305).
2. Nikitin A. G. Symmetries of Schrödinger equation with scalar and vector potentials. (arxiv.org:2005.10305).

NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER

G. Kuduk
University of Rzeszow, Poland
gkuduk@onet.eu

Let $H(\mathbb{R} \times ((T_1, T_2) \cup (T_3, T_4)))$ be a class of entire functions $f(t, x)$, on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $K_{\mathbb{C},M}$ be a class of quasi-polynomials of the form

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} Q_j(t, x) e^{\alpha_j x + \beta_i t}, \tag{1}$$

where $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in M \subset \mathbb{C}$, $\alpha_l \neq \alpha_k$, for $l \neq k$, $\beta_1, ..., \beta_p \in \mathbb{C}$, $\beta_l \neq \beta_k$, for $l \neq k$, $Q_1(t, x), ..., Q_m(t, x)$, are given polynomials.

Each quasi-polynomial $f(t, x)$ of the form (1) defines a differential operation $f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$ of finite order on the class of entire functions $\Phi(\nu, \lambda)$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \Phi(\nu, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \Phi(\nu, \lambda) \bigg|_{\lambda=0, \nu=0}.$$

In the strip $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}\}$ we consider the system of equations

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U_j(t, x) = f(t, x) \quad i = 1, ..., n \tag{2}$$

that satisfies integral conditions

$$\int_{T_1}^{T_2} U_i(t, x) dt + \int_{T_3}^{T_4} U_i(t, x) dt = 0 \tag{3}$$

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, are differential expression with entire symbols $a_{ij}(\lambda) \neq 0$.

Solution of the problem (2), (3) according to the differential-symbol method [1] exists and unique in the class of quasi-polynomials.

1. Kalenyuk P I., Nytrebych Z M. Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method [in Ukrainian]. — Lviv: Publishing House of Lviv Politechnic University, 2002, 292 pp.

Integral problem with respect to time for PDE with Bessel operators

A. M. Kuz

Pidstryhach Institute for Aplied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

kuz.anton87@gmail.com

Boundary value problems (including integral problems) for PDEs with Bessel operators arises in various problems of mathematical physics (wave propagation, signal processing, static potentials and others). Such problems were investigated under different points of view by many authors (see [1,2] and references therein).

In domain $\mathcal{D} := \{(t,x) : t \in (0,T), x \in (0,L)\}$ we consider the following problem:

$$\mathcal{B}_\nu\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u = a^2\mathcal{B}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad (t,x) \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

$$\int_0^T t^{r_1}u(t,x)dt = \varphi(x), \quad \int_0^T t^{r_2}u(t,x)dt = \psi(x), \quad x \in (0,L), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

where $a > 0$, $\nu,\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\nu,\mu > -\frac{1}{2}$, $\nu \neq \mu$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$; operator $\mathcal{B}_\alpha(d/dy)$ is the Bessel operator of order α:

$$\mathcal{B}_\alpha := \frac{d^2}{dy^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dy}.$$

By $J_\alpha(y)$ we denote the Bessel function of the first kind of order α [3]. Let $\lambda_{\mu,k}$, $k \in \mathbb{N}$, are the roots of the equation $J_\mu(\lambda L) = 0$ and $w_{\mu,k}(x) = \sqrt{2}\,x^{-\mu}J_\mu(\lambda_{\mu,k}x)/(LJ_{\mu+1}(\lambda_{\mu,k}L))$. Functions $w_{\mu,k}(x)$ forms the basis of the space $L_2((0,L),x^{2\mu+1}dx)$. Also by $\Delta(\lambda_{\mu,k},T)$ we denote determinant of matrix $\left\|\int_0^T t^{r_j-\nu}J_{(-1)^{q+1}\nu}(a\lambda_{\mu,k}t)dt\right\|_{j,q=1,2}$.

Lemma 1. *If $r_j > \min\{-1, 2\nu-1\}$, $j = 1,2$, and $\Delta(\lambda_{\mu,k},T) \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$ then the solution of the problem (1)-(3) can be written in the form of series*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Delta_{jq}(\lambda_{\mu,k},T)}{\Delta(\lambda_{\mu,k},T)}t^{-\nu}J_{(-1)^q\nu}(a\lambda_{\mu,k}t)\right)w_{\mu,k}(x),$$

where $\Delta_{jq}(\lambda_{\mu,k},T)$ are the cofactor of entry in j-th row and q-th column in $\Delta(\lambda_{\mu,k},T)$.

Note, that $\Delta(\lambda_{\mu,k},T)$ in case $r_1 = 1$, $r_2 = 2\nu+1$ can be expressed in terms of Bessel functions of the first kind. In this work we establish conditions of correctness of the problem (1)-(3) in corresponding functional spaces under certain conditions on boundary data.

1. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. The Transmutation Method and Boundary-Value Problems for Singular Elliptic Equations [in Russian]. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2018, Vol. 64, No. 2, 211–426.
2. Zaitseva N. V. The nonlocal problem for a hyperbolic equation with Bessel operator in a rectangular domain [in Russian]. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci., 2016, Vol. 20, No. 4, 589–602.
3. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. V. 1. — Cambridge: Cambridge University Press, 1966, 815 pp.

Nonlinear fractional Langevin integro-differential equations involving two fractional orders with boundary conditions

A. Lachouri[1], **A. Ardjouni**[2]
[1] University of Annaba, Annaba, Algeria
[2] University of Souk Ahras, Souk Ahras, Algeria
lachouri.adel@yahoo.fr, abd_ardjouni@yahoo.fr

Abstract: *This work is devoted to the study of nonlinear fractional Langevin integro-differential equations involving two fractional orders with boundary conditions. Some effective results about the existence and uniqueness are obtained by applying the Banach contraction mapping principle and the Schauder fixed point theorem. An example is presented which illustrates the effectiveness of the theoretical results.*

Problem 1. Inspired and motivated by the works mentioned in the references, we study the existence and uniqueness of solutions for the following nonlinear fractional Langevin integro-differential equation

$$\begin{cases} D^{\beta}\left({}^{C}D^{\alpha}+\lambda\right)x\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),I^{\gamma}x\left(t\right)\right),\, t\in\left(0,T\right),\ \lambda\in\mathbb{R}, \\ {}^{C}D^{\alpha}x\left(0\right)={}^{C}D^{\alpha}x\left(T\right)=0,\ x\left(0\right)=a\int_0^T x\left(s\right)ds+b,\ a,\ b\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

where D^{β}, ${}^{C}D^{\alpha}$ are the Riemann-Liouville fractional derivative and Caputo fractional derivative of orders β, α, respectively, $1<\beta<2$, $0<\alpha<1$, I^{γ} is the Riemann-Liouville fractional integral of order $\gamma\in(0,1)$, and $f:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is nonlinear continuous function.

1. Ahmad B., Alsaedi A., Salem S. On a nonlocal integral boundary value problem of nonlinear Langevin equation with different fractional orders. Adv. Differ. Equ., 2019, 1, 57.
2. Baghani H., Nieto J. J. On fractional Langevin equation involving two fractional orders in different intervals. Nonlinear Analysis: Modelling and Control., 2019, 24, No. 6, 884-897.
3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier Science B, 2006, 523 p.
4. Smart D. R. Fixed point theorems. — London-New York: Cambridge University Press, 1974, 99 p.

On nonlocal problem for the equation with the operator of generalized differentiation

M. P. Negrych, M. M. Symotiuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU Lviv, 3b Naukova str. Ukraine

negrychmariya@gmail.com, mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

Let $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ be a sequence such that $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{n^\gamma} = b$ for some $b, \gamma > 0$. Function $F(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{m_1 \ldots m_n}$ is the entire function and generates the operation Gel'fond-Leont'ev generalized differentiation [1, 2]. For power series $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ the action $D_F[f(z)]$ defined by equality $D_F[f(z)] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} m_{n+1} a_{n+1} z^n$. Let H be a separable Hilbert space over $\mathbb{C}$ with Hermitian scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ and base $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an orthonormal system respect to this product. For the sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, such that $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty$, we denote the linear operator $A : \mathcal{D}om(A) \to H$, $\mathcal{D}om(A) \subset H$, by the rule $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{N}$. By $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma > 0$, we denote

$$\left\{ \varphi \in H \;\middle|\; \|\varphi; E_{\alpha,\beta}\|^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\lambda_k|^\gamma) |\langle \varphi, e_k \rangle_H|^2 < \infty \right\}.$$

Obviously, domain $\mathcal{D}om(A)$ coincides with $E^0_{1,0}$. The space of all H-valued functions $u(z) : \overline{B} \to H$, which are analytical on $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, n times $\mathcal{D}_F$-differentiable on $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, with the finite norm $\|u(z); \mathcal{U}^n\| = \max\limits_{0\leq j\leq n} \max\limits_{|z|\leq 1} \|\mathcal{D}^j_F u(z); E^0_{n-j,0}\|$ we denote by $\mathcal{U}^n$, where the symbol $\mathcal{D}^j_F u(z)$ denote the series

$$\mathcal{D}^j_F u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} D^j_F \left[\langle u(z), e_k \rangle_H \right] e_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

We consider such two-point problem

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \mathcal{D}^{2j}_F A^{2n-j} u(z) = 0, \quad z \in B, \tag{1}$$

$$D^{2j-2}_F u(0) = \varphi_j, \quad D^{2j-2}_F u(z_1) = \varphi_{j+n}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

where $a_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, n, a_n = 1, z_1 \in B$. The function $u \in \mathcal{U}^{2n}$ is said to be solution of the problem (1), (2) if it satisfies equation (1) and conditions (2). We obtain the results about correctness of the problem (1), (2). These results are connected with estimates of small denominators, which appear under construction of solution to the problem.

1. Gel'fond A. O., Leont'ev A. F. On a generalization of the Fourier series. Mat. Sbornik, 1951, 29, No. 71, 477–500.
2. Gromov V. P. Cauchy problem for convolution equations in spaces of analytic vector-valued functions. Math. Notes, 2007, 82, No. 2, 165–173.

On solution the boundary value problem of the fourth-order equation with nonlocal conditions

J.A. Otarova

Karakalpak state university, Nukus, Uzbekistan

j.otarova@mail.ru

In [1], questions of classification and reduction to the canonical form of linear fourth-order partial differential equations were studied. Also, correct boundary value problems for hyperbolic and mixed types were solved and investigated. Direct and inverse boundary value problems for equations of the fourth order were studied in [1 - 3].

In rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ \ 0 < t < 1\}$, we consider the equation

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u\left(x,t\right)}{\partial x^4} = f\left(x,t\right), \tag{1}$$

where $f(x,t)$ - the given function.

Problem 1. To find a solution $u\left(x,t\right)$in the domain Ω of equation (1) to satisfies boundary value conditions

$$\begin{cases} u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \\ u\left(x,1\right) = \psi\left(x\right), \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$\begin{cases} u\left(0,t\right) = 0, \\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(1,t\right), \\ u_{xx}\left(1,t\right) = 0, \\ u_{xxx}\left(0,t\right) = u_{xxx}\left(1,t\right), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1. \tag{3}$$

Definition 1. A regular solution of problem (1) - (3) is a function $u\left(x,t\right)$ that: 1) is continuous in the Ω domain; 2) it possesses in the domain Ω continuous derivatives of the second and fourth order, respectively, in t and x; 3) satisfies equation (1) with conditions (2) and (3) in the usual classical sense.

Theorem 1. *Let the functions $\varphi\left(x\right), \psi\left(x\right)$ and $f\left(x,t\right)$ satisfy the following conditions: $\varphi\left(x\right),\ \psi\left(x\right)\ \in C^{(5)}\left[0,1\right]$, $\varphi\left(0\right) = \psi\left(0\right) = 0$, $\varphi'\left(0\right) = \varphi'\left(1\right)$, $\psi'\left(0\right) = \psi'\left(1\right)$, $\varphi''\left(1\right) = 0$, $\psi''\left(1\right) = 0$, $\varphi'''\left(0\right) = \varphi'''\left(1\right)$, $\psi'''\left(0\right) = \psi'''\left(1\right)$, $\varphi^{(4)}\left(0\right) = \psi^{(4)}\left(0\right) = 0$, $f\left(0,t\right) = 0$, $f_x\left(0,t\right) = f_x\left(1,t\right)$. Then there exists a unique regular solution to problem 1.*

1. Djuraev T. D, Sopuev A. To the theory of the differential equations in private derivatives of the fourth order [in Russian]. — Tashkent. "FAN", 2000, 144 p.
2. Otarova J. A. Solvability and spectral properties of boundary value problems for a fourth-order mixed-type equation. Author. dis. Cand. physical - mat sciences. —Tashkent: AS RUz, 2009, 16 p.
3. Berdyshev A.S., Kadirkulov B. Zh. On a problem of Samara type for a fourth-order parabolic equation [in Russian]. Proceedings of scientific conf. "Problems of modern mathematics". Karshi., April 22 - 23, 2011, pp. 84 - 86.

Long-time evolution of the shifted step initial data for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation

Ya. Rybalko[1], **D. Shepelsky**[1,2]

[1] B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, Kharkiv, Ukraine

[2] V.Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

rybalkoyan@gmail.com, shepelsky@yahoo.com

We consider the Cauchy problem for integrable nonlocal nonlinear Schrödinger (NNLS) equation

$$iq_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2\sigma q^2(x,t)\bar{q}(-x,t) = 0,\ x \in (-\infty, \infty),\ t \geq 0,\ \sigma = \pm 1, \tag{1}$$

for a family of "shifted to the right" step-like initial data:

$$q(x,0) = \begin{cases} 0, & x < R, \\ A, & x > R, \end{cases} \tag{2}$$

where $A, R > 0$ are arbitrary constants. The NNLS equation was introduced by Ablowitz and Musslimani in [1] as a nonlocal reduction of the classical Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) system:

$$\begin{cases} iq_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2q^2(x,t)r(x,t) = 0, \\ -ir_t(x,t) + r_{xx}(x,t) + 2r^2(x,t)q(x,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

with $r(x,t) = \sigma\bar{q}(-x,t)$, where $\sigma = +1$ and $\sigma = -1$ correspond to the focusing and defocusing equation respectively.

In the case of local, translation invariant, integrable equations (e.g., the classical NLS equation, which is a local reduction of (3) with $r(x,t) = \sigma\bar{q}(x,t)$), it is clear that the long-time asymptotics of the solution of the initial value problem with initial conditions (2) does not depend on R. But in the case of a nonlocal equation (such as NNLS), the situation is clearly different: the nonlocal nonlinear term immediately "mixes up" the state of the system at x and $-x$ and thus one expects the different behavior for different R.

In our work [3] we rigorously demonstrate that the absence of translation invariance affects significantly the qualitative behavior (particularly as $t \to \infty$) of the solution. We show that in the focusing case ($\sigma = +1$), if $R \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2A}, \frac{(2n+1)\pi}{2A}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, then the (x,t) plane splits into $4n+2$ sectors exhibiting different asymptotic behavior of the solution of (1)+(2) as $t \to \infty$ along the rays $\frac{x}{t} = const$ ($2n+1$ decaying sectors and $2n+1$ "modulated constants" sectors). This result is in a sharp contrast with the local case [2], where for any shift R the asymptotics always has three qualitatively different regions: decaying, plane wave and elliptic wave region. On the other hand, in the defocusing case ($\sigma = -1$), if $R \in \left(\frac{(n-1)\pi}{A}, \frac{n\pi}{A}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, then there exist $4n$ different asymptotic regions: $2n$ decaying sectors and $2n$ "modulated constants" sectors altering each other. These results also show that step-like problems for focusing and defocusing nonlocal NLS equations are close to each other, in contrast to the local case.

1. Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation. Phys. Rev. Lett., 2013, 110, 064105.
2. Boutet de Monvel A., Kotlyarov V. P., Shepelsky D. Focusing NLS Equation: Long-time dynamics of step-like initial data. Int. Math. Res. Not., 2011, 7, 1613–1653.
3. Rybalko Ya., Shepelsky D. Long-Time Asymptotics for the Integrable Nonlocal Focusing Nonlinear Schrödinger Equation for a Family of Step-Like Initial Data. Comm. Math. Phys., 2021, 382, 87–121.

Generalization of the algebraic method of group classification

Olena Vaneeva

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

vaneeva@imath.kiev.ua

Group classification is concerned with finding an exhaustive list of inequivalent equations from a class of differential equations containing one or more arbitrary elements [1]. It was originally motivated from theoretical physics, where traditionally the equations admitting the maximal number of symmetries among equations from a given class yield the most promising model describing real-world phenomena.

All previous versions of the algebraic method of group classification were based on certain normalization properties of classified classes. Roughly speaking normalized classes are those where all nondegenerate (point) transformations connecting particular equations from the class are induced by transformations from its equivalence group. In [2] we have extended the algebraic method of group classification to non-normalized classes of differential equations. For this purpose several new notions were introduced, in particular, notions of regular and singular cases of Lie symmetry extensions. Regular Lie-symmetry extensions are associated with subalgebras of the equivalence algebra of the class, while singular Lie-symmetry extensions are not related to them.

We exhaustively solve the group classification problem for the non-normalized class $\mathcal{W}$ of nonlinear wave and elliptic equations of the form

$$u_{tt} = f(x,u)u_{xx} + g(x,u), \quad (f_u, g_{uu}) \neq (0,0). \tag{1}$$

The equivalence algebra $\mathfrak{g}^\sim$ of the class (1) is spanned by the vector fields

$$\partial_t, \quad t\partial_t - 2f\partial_f - 2g\partial_g, \quad u\partial_u + g\partial_g,$$

$$\zeta\partial_x + \tfrac{1}{2}\zeta_x u\partial_u + 2\zeta_x f\partial_f + \tfrac{1}{2}(\zeta_x g - \zeta_{xxx}uf)\partial_g, \quad \chi\partial_u - \chi_{xx}f\partial_g,$$

where $\zeta = \zeta(x)$ and $\chi = \chi(x)$ run through the set of smooth functions of x.

The complete solution of the group classification problem includes the complete preliminary group classification of the class and the construction of singular Lie-symmetry extensions, which are not related to subalgebras of the equivalence algebra. The complete preliminary group classification is based on classifying appropriate subalgebras of the entire infinite-dimensional equivalence algebra $\mathfrak{g}^\sim$ whose projections are qualified as maximal extensions of the kernel invariance algebra.

The results obtained can be used to construct exact solutions of nonlinear wave and elliptic equations.

1. Ovsiannikov L. V. Group analysis of differential equations. — New York: Acad. Press, 1982, 416 p.
2. Vaneeva O., Bihlo A., Popovych R. O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 2020, 91, 105419.

VERY SINGULAR AND LARGE SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATE ABSORPTION

Ye. Yevgenieva

Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine, Sloviansk, Ukraine

yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

Let Ω be bounded C^2 domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Consider the following problem for semilinear elliptic equation:

$$-\Delta u + H(x)u^q = 0 \quad \text{in } \Omega,\ q > 1,\ H(x) \geqslant 0\ \forall\, u \geqslant 0,\ x \in \overline{\Omega} \tag{1}$$

$$u = k\delta_a \quad \text{on } \partial\Omega,\ \delta_a \text{ — Dirac measure},\ k > 0,\ a \in \partial\Omega. \tag{2}$$

We study solution $u_\infty(t,x)$ of (1), satisfying condition (2) with $k = \infty$ in the following sense: $u_\infty(0,x) = 0\ \forall x : |x| > 0$, $\lim_{t\to 0}\int_{R^n} u_\infty(t,x)dx = \infty$. Solution u_∞ is called very singular (v.s.) solution.

The existence of such solutions was investigated by many authors [1], [2], i.e. H. Brezis, A. Friedman, L.A. Peletier, D. Terman (for parabolic equstions), M. Marcus, L. Veron, A. Gmira, A. Ratto, M. Rigoli (for elliptic equations) etc.

The following result has been obtained in [3].

Theorem 1. *Let $1 < q < 1 + \frac{2}{N-1}$ and potential $H(\cdot)$ satisfies estimate:*

$$0 \leqslant H(x) \leqslant ch(\rho(x)) \text{ in } \Omega,$$

where $h(s) = \exp\left(-\frac{\omega(s)}{s}\right)$, and nondecreasing function $\omega(\cdot) > 0$: $\omega(s) \to 0$ as $s \to 0$, satisfies technical condition:

$$\limsup_{j\to\infty} \mu(2^{-j+1})\mu(2^{-j})^{-1} < 1, \quad \mu(s) := \frac{\omega(s)}{s}.$$

Then under condition: $\int_0^1 \frac{\omega(s)}{s} = \infty$, solution $u_\infty(x) := \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ is large solution, i.e.

$$\lim_{x\to y} u_\infty(x) = \infty \quad \forall\, y \in \partial\Omega.$$

Thus for $q \in (1, 1 + \frac{2}{N-1})$ Dini condition is criterion (necessary and sufficient condition) for existence of very singular solution of problem (1), (2).

Remark 1. Dini condition is also sufficient condition for uniqueness of large solution. We conjecture that Dini condition is also necessary condition for uniqueness of large solution.

The research is supported by the National Academy of Sciences of Ukraine in the frame of projects 0120U100177 and 0120U100178.

1. Marcus M., Veron L. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: The subcritical case. Arch. Rat. Mech. Anal., 1998, 144, 201–231.
2. Gmira A., Veron L. Boundary singularity of solutions of nonlinear elliptic equations. Duke Math. J., 1991, 64, 271–324.
3. Shishkov A., Yevgenieva Ye. Very singular and large solutions of semilinear elliptic equations with degenerate absorption. 2021. (submitted).

Lie symmetry analysis of the coupled system of sine-Gordon equations

Ozgur Yildirim, Melis Mendi
Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey
ozgury@yildiz.edu.tr, melismend3@gmail.com

In the present work, the Lie symmetry analysis of the coupled system of sine-Gordon equations

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(u - v), \\ v_{tt} - v_{xx} = \sin(u - v) \end{cases}$$

are studied. This problem is important in DNA (deoxyribonucleic acid) dynamics. The symmetry generators and the corresponding infinitesimals of the system are constructed and the respective symmetry transformation groups are derived. The invariant criterions under the symmetry transformation groups are presented.

1. Olver P. J. Applications of Lie Groups to Differential equations. — Berlin: Springer, 1993, 513 p.
2. Bluman G. W., Kumei S. Symmetries and Differential equations. — Berlin: Springer, 1989, 412 p.
3. Ibragimov N. H. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential equations, vol. 1. — Boca Raton, FL: CRC Press, 1994, 448 p.
4. Ovsiannikov L. V. Group Analysis of Differential equations. — New York: Academic, 1982, 416 p.
5. Yildirim O., Caglak S. Lie point symmetries of difference equation for nonlinear sine-Gordon equation. Physica Scripta, 2019, 94, 085219(8).

A time-dependent energy-momentum method

B. M. Zawora
University of Warsaw, Warsaw, Poland
b.zawora@student.uw.edu.pl

The Marsden-Weinstein reduction theorem allows for the simplification of a Hamiltonian system on a symplectic manifold with a Hamiltonian Lie group of symmetries of a certain type to new Hamiltonian systems, so-called reduced Hamiltonian systems, arising as projections to quotients of submanifolds of the original Hamiltonian system that are invariant relative to its evolution. This technique has proven to be very fruitful and many applications and generalisations have been accomplished over the years. It may happen that an equilibrium point of a reduced Hamiltonian system is not the projection of an equilibrium point of the initial one. In my talk, I will present a time-dependent generalisation of the so-called energy-momentum method, originally designed for studying the stability of equilibrium points of a reduced, autonomous, Hamiltonian system. First, I shall introduce some fundamental notions from symplectic geometry and Lyapunov stability such as momentum maps, the Marsden-Weinstein theorem, and stability theorems, extending classical results to a time-dependent setting on manifolds. Next, I will define a notion of relative equilibrium points that are points that project onto equilibrium points after the Marsden-Weinstein reduction to a quotient space. Then, I shall comment on the properties of these equilibrium points and their relation to the behaviour of the initial Hamiltonian system at relative equilibrium points. Finally, I will introduce some conditions determining the stability of equilibrium points of reduced Hamiltonian systems and several other related results. As an application, I study different non-autonomous Hamiltonian systems of physical interest.

Про еліптичні задачі з крайовими даними низької регулярності в узагальнених просторах Соболєва

А. В. Аноп

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

ahlv@ukr.net

Доповідь присвячена застосуванню гільбертових узагальнених просторів Соболєва H^{α}, де $\alpha \in \mathrm{OR}$, до еліптичних задач з крайовими даними, які є довільними розподілами. Тут, OR — множина усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$, для кожної з яких існують такі дійсні числа $r_0 < r_1$ і $c_0, c_1 > 0$, що $c_0\lambda^{r_0} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c_1\lambda^{r_1}$ для всіх $\lambda, t \in [1,\infty)$. Ці функції називають OR-змінними на ∞ за В. Г. Авакумовичем. Нехай $\sigma_0(\alpha)$ — супремум усіх r_0 таких, що виконується ліва частина двобічної нерівності, а $\sigma_1(\alpha)$ — інфімум усіх r_1 таких, що виконується права частина цієї нерівності. Гільбертів простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, перетворення Фур'є яких Fw задовольняє умову $\alpha(1+|\xi|)\cdot(Fw)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Його аналоги для евклідових областей та гладких компактних многовидів уводяться стандартним чином.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\Gamma \in C^{\infty}$. В Ω розглядаємо регулярну еліптичну крайову задачу, яка складається з еліптичного диференціального рівняння $Au = f$ в Ω парного порядку $2q \geq 2$ і крайових умов $B_j u = g_j$ на Γ порядків $m_j \leq 2q-1$, де $j = 1, ..., q$. Усі коефіцієнти рівняння та умов належать до $C^{\infty}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ та $C^{\infty}(\Gamma, \mathbb{C})$ відповідно.

Нехай функція $\varphi \in \mathrm{OR}$ така, що $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$. Якщо $\sigma_1(\varphi) \geq -1/2$, виберемо числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, $s_1 > \sigma_1(\varphi)$, $\lambda \in (-1/2, s_1]$ і покладемо $\eta(t) := t^{(1-\theta)s_1}\varphi(t^{\theta})$ при $t \geq 1$, де $\theta := (s_1-\lambda)/(s_1-s_0)$. Якщо $\sigma_1(\varphi) < -1/2$, виберемо число $\lambda > -1/2$ і покладемо $\eta(t) := t^{\lambda}$ при $t \geq 1$. Нехай $H^{\varphi\rho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ — гільбертів простір усіх розподілів $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ таких, що $Au \in H^{\eta}(\Omega)$, наділений скалярним добутком графіка. Тут $\varphi\rho^{2q}$ позначає функцію $\varphi(t)t^{2q}$ аргументу $t \geq 1$, а $\varphi_j(t) := \varphi(t)t^{2q-m_j-1/2}$.

Теорема 1. *Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{\varphi\rho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$, а відображення $u \mapsto (Au, B_1u, \ldots, B_qu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого нетерового оператора на парі гільбертових просторів $H^{\varphi\rho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ і $H^{\eta}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi_j}(\Gamma)$. Його ядро лежить у $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ та разом з індексом не залежить від φ і η.*

Нехай U — відкрита підмножина $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap U \neq \varnothing$ і $\Gamma_0 := \Gamma \cap U \neq \varnothing$. Позначимо через $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$, де $\alpha \in \mathrm{OR}$, простір усіх розподілів $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^{\alpha}(\Omega)$ за умови, що $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Аналогічно вводимо $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$.

Теорема 2. *Припустимо, що розподіл $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ є розв'язком розглянутої еліптичної задачі, де $f \in H^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \cap H^{-1/2+}(\Omega)$ і $g_j \in H^{\varphi_j}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ для кожного $j \in \{1, \ldots, q\}$. Тоді $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.*

Тут $H^{-1/2+}(\Omega)$ — об'єднання усіх соболєвських просторів $H^{s}(\Omega)$, де $s > -1/2$.

Наведено застосування цих теорем до однорідних еліптичних рівнянь, інтерполяції деяких функціональних просторів, пов'язаними з цими рівняннями, та до еліптичних задач з білим гауссовим шумом у крайових умовах. Ці результати отримано спільно з Р. Денком і О. О. Мурачем в [1].

1. Anop A., Denk R., Murach A. Elliptic problems with rough boundary data in generalized Sobolev spaces. Comm. Pure Appl. Anal., 2021, 20, No. 2, 697–735.

Динамічна задача пружності для чверті простору

К. С. Бондаренко, Г. О. Фесенко

ОНУ імені І.І. Мечникова Факультет математики, фізики та інформаційних технологій. Кафедра методів математичної фізики, Одеса, Україна

kirill-bondarenko@stud.onu.edu.ua, fesenko@onu.edu.ua

Під час побудови та експлуатації споруд та конструкцій з'являються динамічні або статичні навантаження, через які у пружних тілах виникають та концентруються напруження. Ці напруження можуть деформувати та навіть зламати конструкцію. Тому треба їх враховувати під час будівництва. Задачі теорії пружності розглядалися у статичній або динамічній постановці багатьма авторами для різних об'єктів з різними початковими та крайовими умовами. Такий об'єкт, як чверть простору може розглядатися, як модельний перед роз'вязанням аналогічної задачі для нескінченного, або півнескінченного шару, а потім для плити.

Побудовано хвильове поле пружного чвертьпростору, коли одну границю жорстко закріплено, а на іншій по прямокутній ділянці діє нестаціонарне нормальне стискаюче навантаження в початковий момент часу. Інтегральні перетворення Лапласа та Фур'є застосовано послідовно до рівнянь руху та до граничних умов, на відміну традиційним підходам, коли інтегральні перетворення застосовуються до подання розв'язків через гармонічні функції. Це приводить до одновимірної векторної однорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано за допомогою матричного диференціального числення. Поле вихідних переміщень знайдено після застосування обернених інтегральних перетворень. Для випадку стаціонарних коливань вказано спосіб обчислення у розв'язку квадратур у ближній зоні навантаження. Для аналізу коливань у віддаленій зоні побудовано асимптотичні формули. Досліджено амплітуду вертикальних коливань в залежності від форми ділянки навантаження, власних частот коливань та матеріалу середовища.

Метод [1], полягає у поданні системи рівнянь Ламе через два спільно та одне окремо розв'язувані рівняння. Також завдяки цьому методу розв'язано змішану задачу теорії пружності в [2] цей метод використовувався під час розв'язання запропонованої задачі.

1. Попов Г. Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям, ДАН, 2002, 384, № 2, 193–196.
2. Попов Г. Я. Точное решение смешанной задачи теории упругости для четверти пространства, Известия РАН. Мех. твердого тела, 2003, № 6, 31–39.

Про властивості обмежених розв'зків різницевих рівнянь зі стрибками операторних коефіцієнтів

М. Ф. Городній, В. П. Кравець

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

horodnii@gmail.com, toriiawik@ukr.net

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір; $\mathcal{L}(X)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють в X; I, O — відповідно одиничний та нульовий оператори в X. Нехай A, B, U, V — фіксовані оператори з $\mathcal{L}(X)$.

Відомо (див., наприклад, [1]), що різницеве рівняння

$$u_{n+1} = Uu_n + v_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

має для кожної обмеженої (за нормою в X) послідовності $\{v_n\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{u_n\}$ тоді і тільки тоді, коли спектр $\sigma(U)$ оператора U не перетинається з одиничним колом $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, а також різницеве рівняння

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Ax_n + y_n,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

має для кожної обмеженої послідовності $\{y_n\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n\}$ у тому і тільки в тому випадку, коли $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$.

Нехай $\sigma(U) \cap S = \varnothing$. Позначимо через $\sigma_-(U)$ і $\sigma_+(U)$ частини спектра, що лежать відповідно всередині і зовні кола S, а через $P_\pm(U)$ — проектори, що відповідають $\sigma_\pm(U)$. Згідно з теоремою про розщеплення оператора простір X зображується у вигляді прямої суми $X = X_-(U) \dot{+} X_+(U)$ інваріантних відносно U підпросторів $X_\pm(U) = P_\pm(U)(X)$.

В [2] встановлено, що коли виконуються умови

(i1) $\sigma(U) \cap S = \varnothing, \sigma(V) \cap S = \varnothing$;

(i2) $X = X_-(U) \dot{+} X_+(V)$,

то різницеве рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта

$$\begin{cases} w_{n+1} = Uw_n + v_n, n \geq 1, \\ w_{n+1} = Vw_n + v_n, n \leq 0, \end{cases} \tag{3}$$

має для кожної обмеженої послідовності $\{v_n\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{w_n\}$.

Справджуються такі теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (i1), (i2), то знайдуться такі залежні тільки від операторів U, V сталі $\rho \in (0, 1)$, $C > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, що для кожної обмеженої в X послідовності $\{v_n\}$ для відповідних до цієї послідовності обмежених розв'язків $\{u_n\}$ рівняння (1) та $\{w_n\}$ рівняння (3) для кожного $n \geq n_0$ виконується оцінка*

$$\|u_n - w_n\| \leq C\rho^n \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|v_n\|.$$

Покладемо $X^2 = \{\overline{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})^t \big| \ x^{(1)}, x^{(2)} \in X\}$.
Тоді X^2 — банахів простір з покоординатними додаванням і множенням на скаляр та нормою $||\overline{x}||_* = ||x^{(1)}|| + ||x^{(2)}||$. Як і для числових матриць, $T_A = \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ задає лінійний обмежений оператор в X^2. Відзначимо, що коли $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$, то $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$.

Теорема 2. *Нехай для операторів* A, B *виконуються такі умови:*
(j1) $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing, \sigma(B) \cap [-4; 0] = \varnothing$*;*
(j2) $X^2 = X^2_-(T_A) \dot{+} X^2_+(T_B)$*.*
Тоді: 1) різницеве рівняння

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = Aa_n + y_n,\ n \geq 1, \\ a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = Ba_n + y_n,\ n \leq 0, \end{cases} \tag{4}$$

має для кожної обмеженої послідовності $\{y_n\}$ *єдиний обмежений розв'язок* $\{a_n\}$*;*

2) існують такі залежні тільки від A*,* B *сталі* $\rho \in (0, 1)$*,* $C > 0$*,* $n_0 \in \mathbb{N}$*, що для кожної обмеженої в* X *послідовності* $\{y_n\}$ *для відповідних до цієї послідовності обмежених розв'язків* $\{x_n\}$ *рівняння (2) та* $\{a_n\}$ *рівняння (4) для кожного* $n \geq n_0$ *виконується оцінка*

$$\|x_n - a_n\| \leq C\rho^n \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|.$$

1. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — К.: Вища шк., 1992, 319 с.
2. Гончар І.В. Про обмежені та сумовні розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта. Вісник КНУ. Серія: фіз.-мат. науки, 2016, № 2, 25-28.

Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння з довільним слабким виродженням

Н. М. Гузик[1], **О. Я. Бродяк**[2,1]

[1] Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна

[2] Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

hryntsiv@ukr.net, brodyakoksana1976@gmail.com

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядається обернена задача визначення залежних від часу функцій $b_1 = b_1(t), \quad b_2 = b_2(t)$ у коефіцієнті при похідній за просторовою змінною у параболічному рівнянні з виродженням

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \; u_x(h,t) = \mu_2(t), \; t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_0^h xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Відомо, що $a(t) > 0, t \in [0,T]$, а виродження рівняння спричиняє монотонно зростаюча функція $\psi(t) > 0, t \in (0,T], \; \psi(0) = 0$. Досліджується випадок слабкого виродження, коли $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$. На основі теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови існування класичного розв'язку задачі (1)-(5). Доведення єдиності базується на властивостях розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду з ядрами, що мають інтегровні особливості. При цьому у дослідженнях використовується апарат функцій Гріна крайових задач для параболічних рівнянь.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

*B*1) $\varphi \in C^2[0,h], \; \mu_i \in C[0,T], \; i = 1,2, \; \mu_i \in C^1[0,T], i = 3,4, \; c, f \in C(\overline{Q}_T)$ *та задовольняють умову Гельдера за змінною x рівномірно по t;*

*B*2) $\varphi'(x) > 0, \, x \in [0,h]$;

*B*3) $\psi(t) > 0, t \in (0,T], \; \psi(0) = 0, \lim\limits_{t\to 0} \int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$;

*B*4) $\varphi'(0) = \mu_1(0), \, \varphi'(h) = \mu_2(0), \; \int\limits_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0), \; \int\limits_0^h x\varphi(x)dx = \mu_4(0)$.

Тоді існує єдиний локальний розв'язок $(b_1, b_2, u) \in (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$ *задачі (1)-(5).*

Визначення характеристик асинхронного двигуна у випадку неповноти інформації про роботу його компонент

І. С. Дмитришин

Інститут прикладної математики та механіки НАН України, Слов'янськ, Україна

dmitrishin.ira@gmail.com

Сучасна промисловість найчастіше використовує електроприводи на базі приводів змінного тока, які генеруються асинхронними двигунами (АД). Задача оцінки стану всіх параметрів АД, для бідь-якої з моделей АД, повністю не була розв'зана, оскільки потребує забеспечення стійкості даного процесу. Пряме вимірювання вектору потокозчеплення не є простою задачею, тому виникає необхідність у використанні методів визначення потокозчеплення ротору за динамічними рівняннями, використовуючи вимірювання фазного току, напруги статора та швидкості обертання ротора [1]. Але й забеспечення точності таких вимірювань також важко досягти, оскільки точніть параметрів АД залежить від партії АД, яка була виготовлена (для кожної партії АД вона є різною, тому виробник найчастіше зазначає середні значення параметрів), умов експлуатації АД.

В роботі розглядається математична модель двохфазного АД, яку записано в системі координат, що прив'язана до статора [2].

$$
\begin{aligned}
\dot{y_1} &= -a_1 y_1 + a_2 U_1 + a_1 \mu x_1 + a_1 y_3 x_2,\\
\dot{y_2} &= -a_0 y_2 + a_2 U_2 - a_1 y_3 x_1 + a_1 \mu x_2,\\
\dot{y_3} &= a_3 y_2 x_1 - a_3 y_1 x_2 - x_3,\\
\dot{x_1} &= a_4 y_1 - \mu x_1 - y_3 x_2,\\
\dot{x_2} &= a_4 y_2 + y_3 x_1 - \mu x_2,\\
\dot{x_3} &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В даній моделі введені наступні позначення: $x = (\lambda_a, \lambda_b, n_p \cdot \tau_L / J_m)^T, y = (i_a, i_b, n_p \cdot \omega)^T$, де i_a, i_b описують токи статора, а λ_a, λ_b- флюси ротора, U_1, U_2- напруги статора, а n_p- число пар полюсів, I_m-момент інерції та τ_L- момент обертання ротора, ω-швидкість обертання ротора, константи $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \mu > 0$.

В роботі приводиться побудова нелінійного спостерігача, який дозволяє отримати оцінки момента обертання статора в залежності від індуктивності та швидкості обертання ротора та обернена до неї задача. До того ж розглянута задача отримання асимптотичних оцінок одночасно обертаючого моменту статора та швидкості момента ротора в залежності від індуктивності та токів статора. Крім того, розглядається й інша постановка задачі, яка дозволяє побудувати нелінійний спостерігач для побудови оцінки швидкості обертання ротора в залежності від токів статора, індуктивності та обертаючого моменту статору. Для побудови спостерігача використано метод синтезу інваріантних співвідношень [3], що виражає невідомі як функції від відомих величин.

1. Терехин А. А.,Даденков Д. А. Обзор способов идентификации параметров асинхронного электропривода. Вестник ПНИПУ, 2017, №22, 56-66.
2. Sassano M. Towards constructive nonlinear control systems analysis and design. PhD thesis,Control and Power Research Group Department of Electrical and Electronic Engineering Imperial College London, 2012.
3. Жоголева Н. В., Щербак В. Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления. Труды ИПММ НАН Украины, 2015, 29, 69-76.

Групова класифікація (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона

О. В. Локазюк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

sasha.lokazuik@gmail.com

У доповіді буде представлено результати роботи [1], де розв'язано задачу групової класифікації нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона

$$u_{tx} = f(t, x, u), \quad f_{uu} \neq 0. \tag{1}$$

Тут і нижче $u = u(t, x)$ — невідома функція незалежних змінних (t, x), а індекси функцій позначають похідні відносно відповідних змінних.

Лема 1. *Клас* (1+1)*-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона* (1) *є нормалізованим. Його групу еквівалентності $G^{\sim}$ породжують перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(x), \quad \tilde{u} = Cu + U^0(t, x), \quad \tilde{f} = \frac{Cf + U^0_{tx}}{T_t X_x}, \quad T_t X_x \neq 0, \tag{2}$$

та дискретне перетворення $\tilde{t} = x$, $\tilde{x} = t$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{f} = f$. Тут T, X, U^0 — довільні гладкі функції своїх аргументів, C — довільна ненульова стала.

Оскільки клас нормалізований, то природно застосувати алгебраїчний метод групової класифікації (див. [2] щодо термінології та відповідних означень). Специфічна структура групи еквівалентності класу дозволяє суттєво використати класичну теорему Лі про реалізації алгебр Лі векторними полями на прямій. Цей підхід дозволяє покращити попередні результати [3] щодо ліївських симетрій рівнянь з класу (1) й істотно спростити доведення. Після знаходження низки цілочисельних характеристик випадків розширень ліївських симетрій, які є інваріантними відносно групи $G^{\sim}$, вичерпно описано послідовні розширення ліївських симетрії в класі.

Теорема 1. *Повний список $G^{\sim}$-нееквівалентних випадків розширень ліївської симетрії в класі* (1) *вичерпують такі випадки:*

$$0)\ f = \hat{f}(t, x, u), \quad 1)\ f = \hat{f}(x, u), \quad 2)\ f = \hat{f}(x - t, u), \quad 3)\ f = \mathrm{e}^t \hat{f}(x, \mathrm{e}^{-t} u),$$

$$4)\ f = \mathrm{e}^{x+t} \hat{f}(x - t, \mathrm{e}^{-x-t} u), \quad 5)\ f = \mathrm{e}^t \hat{f}(\mathrm{e}^{-t} u), \quad 6)\ f = \mathrm{e}^{x+t} \hat{f}(\mathrm{e}^{-x-t} u),$$

$$7)\ f = |x - t|^{-q-2} \hat{f}(|x - t|^q u),\ q \neq 0, \quad 8)\ f = |x|^{-q-2} \hat{f}(|x|^q u),\ q \neq 0,$$

$$9)\ f = \hat{f}(u), \quad 10)\ f = (x - t)^{-2} \hat{f}(u),$$

$$11)\ f = \mathrm{e}^{u/x}, \quad 12)\ f = |u|^p u,\ p \neq -1, 0, \quad 13)\ f = \mathrm{e}^u.$$

Розмірності максимальних алгебр ліївської інваріантності у випадках 0, 1–4, 5–8, 9–11, 12, 13 відповідно дорівнюють 0, 1, 2, 3, 4, ∞.

1. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations. (arXiv:2008.05460).
2. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2020, 91, 105419.
3. Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations. Acta Appl. Math., 2006, 91, 253–313.

Про фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболєва-Слободецького

В. А. Михайлець[1], Т. Б. Скоробогач[2]

[1]Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна

[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" , Київ, Україна

mikhailets@imath.kiev.ua, tetianaskorobohach@gmail.com

Нехай задано скінченний інтервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ та числа

$$m \in \mathbb{N}, \quad s \in (1,\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad \varepsilon_0 > 0, 1 \le p < \infty.$$

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ сім'ю неоднорідних крайових задач вигляду

$$L(\varepsilon)y(t;\varepsilon) := y'(t;\varepsilon) + A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2}$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot;\varepsilon) \in W_p^{s-1}\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big) =: \big(W_p^{s-1}\big)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon) \in W_p^{s-1}\big([a,b];\mathbb{C}^m\big) =: \big(W_p^{s-1}\big)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ — лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon)\colon \big(W_p^s\big)^m \to \mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot;\varepsilon) \in \big(W_p^s\big)^m$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $s > 1 + 1/p$ скрізь) на (a,b) та рівність (2). Крайова умова (2) є найбільш загальною для системи (1). Із крайовою задачею (1), (2) можна пов'язати лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon \big(W_p^s\big)^m \to \big(W_p^{s-1}\big)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Оператор (3) є обмеженим фредгольмовим оператором з індексом 0.

Отримано такі результати:

— встановлено конструктивний критерій неперервної залежності від параметра ε при $\varepsilon = 0$ розв'язку крайової задачі (1),(2);

— доведено, що похибка і нев'язка розв'язку крайової задачі (1),(2) мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$;

— отримано застосування цих результатів до багатоточкових крайових задач.

Умови неперервності за параметром розв'язків одновимірних крайових задач

О. Б. Пелехата, Н. В. Рева

НТУУ "КПІ імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна

pelehataob2015@gmail.com

Розглянемо на скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbf{R}$ для кожного цілого невід'ємного n систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \cdots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{1}$$

із неоднорідними крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot,n) = c_j(n), \quad j \in \{1,2,\ldots,r\} =: [r], \tag{2}$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j(n) : C^{(r-1)}([a,b];\mathbf{C}^m) \to \mathbf{C}^m, \quad j \in [r].$$

Припускається, що матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n)$, вектор-функція $f(\cdot,n)$ сумовні на $[a,b]$, а вектори $c_j(n)$ - задані з простору $\mathbf{C}^m$.

Надалі вважатимемо, що гранична крайова задача (1) – (2) для $n = 0$ має єдиний розв'язок. Тоді цікавими є наступні питання:

- За яких умов на ліві частини задач (1) – (2) їх розв'язки $y(\cdot,n)$ існують і єдині при довільних правих частинах і достатньо великих n;
- Які додаткові умови на ліві і праві частини задач (1) – (2) гарантують, що

  $$\left\|y^{(j-1)}(\cdot,0) - y^{(j-1)}(\cdot,n)\right\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \quad j \in [r],$$

  де $\|\cdot\|_\infty$ — sup-норма на відрізку $[a,b]$.

Отримані в роботах результати дають відповіді на ці питання (див. [1], [2]) .

1. Mikhailets V. A.,Pelekhata O. B., Reva N. V. Limit theorems for the solutions of boundary-value problems. Ukr. Mat. Zh, 2018, 7, No. 2, 243–251.
2. Pelekhata O. B., Reva N. V. Limit Theorems for the Solutions of Linear Boundary-Value Problems for Systems of Differential Equations. Ukr. Mat. Zh, 2019, 71, No. 7, 1061–1070.

Виникнення граничних циклів у моделях динамічних систем конфлікту

О. Р. Сатур

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

oksana@satur.in.ua

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, n > 1$ – деяка скінченна множина з дискретною топологією. Позначимо через $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$ множину дискретних ймовірнісних мір на Ω. Розглянемо довільну фіксовану підмножину мір $\mu_i \in M_1^+(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$. Кожну з цих мір μ_i можна ототожнити з стохастичним вектором $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$, якщо покласти

$$p_{ij} = \mu_i(\omega_j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для побудови динамічної системи визначимо відображення $*$ у просторі стохастичних векторів (перетворення конфлікту) таким чином. Кожному вектору $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ поставимо у відповідність вектор $\mathbf{p}_i^{t+1} = (p_{ij}^{t+1})_{j=1}^n$ за правилом, визначеним у термінах координат

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t}\big(p_{ij}^t\big(\theta^t + 1\big) + \tau_j^t\big), \quad t = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

де $\theta^t = \theta\big(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t\big)$, $z^t = 1 + \theta^t + W^t$, $W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t > 0$. $\tau_j^t = \tau_j(t)$ – довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Позначимо $w_j^t = w_j(t) = \frac{\tau_j(t)}{W(t)}$.

Ітерація відображення $*$ генерує багатокомпонентну динамічну систему з траєкторіями

$$\big\{\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t\big\} \xrightarrow{*,t} \big\{\mathbf{p}_1^{t+1}, \mathbf{p}_2^{t+1}, \dots, \mathbf{p}_m^{t+1}\big\}, \quad t = 0, 1, \dots. \tag{2}$$

Теорема 1. *Припустимо, що головний період функцій $w_j(t)$ є додатнім цілим числом $T > 1$. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (1), заданої системою різнецевих рівняннь (2), збігається до ω-граничної множини $\mathbf{\Gamma}^\infty$, яка є циклічною орбітою. Тобто, множина $\mathbf{\Gamma}^\infty$ є інваріантною відносно перетворення $\circledast$ та складається з T впорядкованих векторів Γ_l, $l = 1, \dots, T$*

$$\Gamma_1 \xrightarrow{\circledast} \Gamma_2 \xrightarrow{\circledast} \Gamma_3 \xrightarrow{\circledast} \cdots \xrightarrow{\circledast} \Gamma_T \xrightarrow{\circledast} \Gamma_1.$$

Гранична ω-множина $\mathbf{\Gamma}^\infty$ є нестійкою.

Автор дякує за фінансову підтримку Національному фонду досліджень України, Проєкт 2020.02/0089.

1. Koshmanenko V., Samoilenko I. The conflict triad dynamical system. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16, No. 7, 2917–2935.
2. Кошманенко В. Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наукова думка, 2016, 287 с.
3. Сатур О. Р. Граничні стани багатокомпонентних динамічних систем, Нелінійні коливання, 2020, 72, № 1, 77–89.

Про апроксимативні властивості розв'язків багатоточкових крайових задач

В. О. Солдатов

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

soldatov@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

В доповіді обговорюється питання про можливість і явні оцінки похибки апроксимації розв'язками багатоточкових крайових задач розв'язку загальної крайової задачі вигляду

$$Ly(t) := y^{(r)}(t) + \sum\nolimits_{l=1}^{r} A_{r-l}(t)\, y^{(r-l)}(t) = f(t) \quad \text{для м.в. } t \in [a,b], \quad By = q. \qquad (1)$$

Тут довільно задано $r, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A_{r-l} \in (L_1)^{m\times m}$, $f \in (L_1)^m$, $q \in \mathbb{C}^{rm}$ і неперервний лінійний оператор $B : (C^{(r-1)})^m \to \mathbb{C}^{rm}$. Припускаємо, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок $y \in (W_1^r)^m$ для довільних $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$. Тут W_1^r — L_1-простір Соболєва порядку r. Нормовані простори L_1, $C^{(r-1)}$ і W_1^r комплексні та задані на $[a,b]$.

Нехай $\mathcal{X}$ — довільна щільна підмножина простору $(L_1)^{m\times m}$. Розглянемо послідовність багатоточкових крайових задач вигляду

$$L_k\, y_k(t) := y_k^{(r)}(t) + \sum\nolimits_{l=1}^{r} A_{r-l,k}(t)\, y_k^{(r-l)}(t) = f(t) \quad \text{для м.в. } t \in [a,b], \qquad (2)$$

$$B_k\, y_k := \sum\nolimits_{j=1}^{p_k} \sum\nolimits_{l=0}^{r-1} \beta_k^{j,l}\, y^{(l)}(t_{k,j}) = q, \qquad (3)$$

де $k \in \mathbb{N}$. Припускаємо, що $A_{r-l,k} \in \mathcal{X}$, $p_k \in \mathbb{N}$, $\beta_k^{j,l} \in \mathbb{C}^{rm\times m}$ і $t_{k,j} \in [a,b]$ для всіх допустимих значень індексів k, l і j. Розв'язки y_k розглядаються у просторі $(W_1^r)^m$.

Теорема 1. *Для крайової задачі* (1) *існує послідовність багатоточкових крайових задач вигляду* (2), (3) *таких, що вони однозначно розв'язні при* $k \gg 1$ *і* $y_k \to y$ *в* $(W_1^r)^m$ *при* $k \to \infty$. *Цю послідовність можна вибрати незалежною від* f *і* q *й побудувати явно.*

Нехай послідовність (2), (3) задовольняє висновок теореми 1 для довільних $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$, якщо $k \geq \widetilde{\varrho}$, де $\widetilde{\varrho}$ — деякий номер. Розглянемо при $k \geq \widetilde{\varrho}$ крайові задачі вигляду

$$L_k\, x_k(t) = f_k(t) \quad \text{для м.в. } t \in [a,b], \quad B_k\, x_k = q_k, \qquad (4)$$

де $f_k \in (L_1)^m$ і $q_k \in \mathbb{C}^{rm}$. Кожна з них має єдиний розв'язок $x_k \in (W_1^r)^m$.

Теорема 2. *Нехай задано числа* $\widehat{\varrho} \geq \widetilde{\varrho}$ *і* $\varepsilon > 0$. *Припустимо, що* $\|f_k - f\|_1 < \varepsilon$ *і* $\|q_k - q\| < \varepsilon$ *при* $k \geq \widehat{\varrho}$. *Тоді існують числа* $\varkappa > 0$ *і* $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ *такі, що* $\|x_k - y\|_{r,1} < \varkappa\varepsilon$ *при* $k \geq \varrho$. *Число* $\varkappa$ *можна вибрати незалежним від* ε, $\widehat{\varrho}$, f, q, f_k *і* q_k, *а* ϱ — *від* f_k *і* q_k. *Зокрема, якщо* $f_k \to f$ *в* $(L_1)^m$ *і* $q_k \to q$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $k \to \infty$, *то* $x_k \to y$ *в* $(W_1^r)^m$ *при* $k \to \infty$.

Тут $\|\cdot\|_1$ — норма в $(L_1)^m$, $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{C}^{rm}$, а $\|\cdot\|_{r,1}$ — норма в $(W_1^r)^m$.

Теорема 3. *Нехай задано числа* $\widehat{\varrho} \geq \widetilde{\varrho}$ *і* $\varepsilon > 0$. *Припустимо, що* $\|F_k - F\|_{(0)} < \varepsilon$ *і* $\|q_k - q\| < \varepsilon$ *при* $k \geq \widehat{\varrho}$, *де* F *і* F_k *первісні функцій* f *і* f_k *на* $[a,b]$, *причому* $F(a) = 0$ *і* $F_k(a) = 0$. *Крім того, припустимо, що* $\sigma := \sup\bigl\{\|B_k\| : k \geq \widehat{\varrho}\bigr\} < \infty$. *Тоді існують числа* $\varkappa > 0$ *і* $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ *такі, що* $\|x_k - y\|_{(r-1)} < \varkappa\sigma\varepsilon$ *при* $k \geq \varrho$. *Число* $\varkappa$ *можна вибрати незалежним від* ε, σ, $\widehat{\varrho}$, f, q *і задач* (4), *а* ϱ — *від* f_k *і* q_k. *Зокрема, якщо* $F_k \to F$ *в* $(C^{(0)})^m$ *і* $q_k \to q$ *в* $\mathbb{C}^{rm}$ *при* $k \to \infty$, *то* $x_k \to y$ *в* $(C^{(r-1)})^m$ *при* $k \to \infty$.

Тут $\|B_k\|$ — норма оператора $B_k : (C^{(r-1)})^m \to \mathbb{C}^{rm}$, а $\|\cdot\|_{(r-1)}$ — норма в $(C^{(r-1)})^m$.

Ці результати отримано спільно з О. О. Мурачем та О. Б. Пелехатою в роботі [1].

1. Мурач О. О., Пелехата О. Б., Солдатов В. О. Апроксимативні властивості розв'язків багатоточкових крайових задач. Укр. мат. журн., 2021, 73, № 3, 341–353.

Знаходження розв'язків динамічних систем на фрактальних множинах

О. П. Страх

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Суми, Україна

strah_o@ukr.net

Як відомо, теорія динамічних рівнянь на часовій шкалі дозволяє розглядати відповідні рівняння та їх системи на фрактальних множинах, які є замкненими підмножинами множини дійсних чисел. Зокрема, існує можливість отримання фундаментальних матриць для однорідних динамічних систем виду

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \tag{1}$$

заданих на множині Кантора. Так, для системи динамічних рівнянь

$$x^{\Delta}(t) = x(t). \tag{2}$$

фундаментальна матриця має вигляд

$$X(t) = \left\{ \begin{cases} \prod\limits_{i} \left[\left(\frac{3^{\alpha_i}+1}{3^{\alpha_i}} e^{-\frac{1}{3^{\alpha_i}}} \right) \cdot \prod\limits_{l=\alpha_i+1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^l+1}{3^l} e^{-\frac{1}{3^l}} \right)^{2^{l-\alpha_i-1}} \right) \right] e^t I, & \forall t = \sum\limits_{i} \frac{2}{3^{\alpha_i}}, \\ I, & t = 0, \end{cases} \right. \tag{3}$$

де I — одинична матриця відповідної розмірності.

Легко показати, що для кожної точки $t = \sum\limits_{i} \frac{2}{3^{\alpha_i}}$ канторової множини відповідний коефіцієнт у виразі (3) для фундаментальної матриці є збіжним.

Виявляється, що не для кожної часової шкали, подібної до множини Кантора, можна отримати вираз фундаментальної матриці системи (2). Але також можна показати, що існують такі динамічні системи виду (1), вигляд розв'язків яких на різних фрактальних множинах є однаковим. Такими системами, наприклад є системи виду

$$x^{\Delta}(t) = \frac{1}{t+\alpha} I x(t), \tag{4}$$

де α — довільне дійсне число. Дійсно, враховуючи означення Δ-похідної для справа розсіяних точок, з рівності

$$X^{\Delta}(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(X(\sigma(t)) - X(t) \right) = \frac{1}{t+\alpha} X(t)$$

отримуємо, що для всіх часових шкал, для яких $t = 0$ є справа щільною точкою, фундаментальна матриця системи (4) має один і той же вигляд

$$X(t) = (t+\alpha)I.$$

1. Agarwal R. P., Bohner M., Boichuk A., Strakh O. Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38, No. 17, 4178-4186.

$P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

О. О. Чепок

Державний заклад "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського", Одеса, Україна

olachepok@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, функція $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ є неперервною функцією, функція $\varphi_1\colon \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1, с. 17]) порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_1 , а функція $\varphi_0\colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та така, що вона та її похідна першого порядку є швидко змінними [1, с. 139] при прямуванні аргументів до Y_0, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — однобічний окіл Y_i, $(i \in \{0, 1\})$.

Рівняння (1) досліджується щодо умов існування так званих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків (див. [2]) у особливому випадку $\lambda_0 = \pm\infty$. Зважаючи на апріорні властивості функцій цього класу розв'язків, їх похідна другого порядку у явному вигляді не може бути виражена через похідну першого порядку, що змушує змінити методику їх дослідження порівняно з іншими випадками.

Результати доповнюють отримані раніше достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків досліджуваного рівняння [3,4]. $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язки рівняння (1) знайдені у термінах деякої неперервно диференційовної функції $L\colon [t_0, \omega[\longrightarrow R (t_0 \in [a, \omega[)$. Було знайдено достатні умови існування у рівняння (1) розв'язків цього класу, за умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \gamma_0, \quad \text{де} \quad \gamma_0 = 0, \quad H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{L'(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}. \tag{2}$$

Випадки $\gamma_0 = \pm\infty$ та $0 < |\gamma| < +\infty$ були розглянуті, відповідно, у роботах [3] та [4].

За умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків у рівняння (1) для випадку виконання умови (2), знайдені наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot o(1),$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t) \cdot L'(t)] \cdot [1 + |H(t)|^{-\frac{1}{2}} \cdot o(1)].$$

1. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press, Cambridge,1987, 494 p.
2. Евтухов В. М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Киев, 1998, 295 с.
3. Чепок О. О. Асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними функціями. Дослідження в математиці і механіці, 2018, 23, № 2(32) 108 – 117.
4. Chepok, O. O. Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities. Bukovinian Math. Journal, 2020, 8, No. 1, 10 – 19.

Про еліптичні задачі з грубими крайовими даними у просторах Нікольського

І. С. Чепурухіна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Chepurukhina@gmail.com

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\Gamma \in C^\infty$. Розглянемо в Ω лінійну еліптичну крайову задачу (ЕКЗ) вигляду

$$A(x,D)u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \qquad B_j(x,D)u(x) = g_j(x),\ x \in \Gamma,\ j = 1,\dots,l. \tag{1}$$

Тут $\operatorname{ord} A = 2l$, де $l \in \mathbb{N}$, а $m_j := \operatorname{ord} B_j \le 2l-1$. Коефіцієнти операторів A і B_j належать до просторів $C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{C})$ і $C^\infty(\Gamma,\mathbb{C})$ відповідно.

У доповіді обговорюється характер розв'язності і властивості розв'язків цієї ЕКЗ у просторах Нікольського $B^s_{p,\infty}(\Omega)$ низької регулярності s за припущення, що $f \in L_p(\Omega)$, де $1 < p < \infty$. Для довільного розподілу $u \in S'(\Omega)$ такого, що $Au \in L_p(\Omega)$, коректно означені розподіли $B_j u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ за допомогою граничного переходу.

Теорема 1. *Нехай $s \le 2l$ і $1 < p < \infty$. Тоді ЕКЗ* (1) *породжує нетерів обмежений оператор на парі банахових просторів*

$$\bigl\{u \in B^s_{p,\infty}(\Omega) : Au \in L_p(\Omega)\bigr\} \quad i \quad L_p(\Omega) \times \prod\nolimits_{j=1}^{l} B^{s-m_j-1/p}_{p,\infty}(\Gamma),$$

де перший простір наділений нормою графіка. Ядро цього оператора лежить у просторі $C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{C})$ і разом з індексом не залежить від s і p.

Нехай відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap U \neq \varnothing$ і $\Gamma_0 := \Gamma \cap U \neq \varnothing$. Позначимо через $B^{\sigma,\mathrm{loc}}_{p,\infty}(\Omega_0,\Gamma_0)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$, простір усіх розподілів $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in B^\sigma_{p,\infty}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Аналогічно позначимо через $B^{\sigma,\mathrm{loc}}_{p,\infty}(\Gamma_0)$ простір усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in B^\sigma_{p,\infty}(\Gamma)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$, яка задовольняє $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$.

Теорема 2. *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і $1 < p < \infty$. Припустимо, що розподіл $u \in S'(\Omega)$ є розв'язком ЕКЗ* (1), *праві частини якої задовольняють умови $f \in L_p(\Omega) \cap B^{s-2l,\mathrm{loc}}_{p,\infty}(\Omega_0,\Gamma_0)$ і $g_j \in B^{s-m_j-1/p,\mathrm{loc}}_{p,\infty}(\Gamma_0)$ для кожного $j \in \{1,\dots,l\}$. Тоді $u \in B^{s,\mathrm{loc}}_{p,\infty}(\Omega_0,\Gamma_0)$.*

Теорема 3. *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і $1 < p < \infty$. Припустимо, що розподіл $u \in S'(\Omega)$ задовольняє умови теореми* 2. *Довільно виберемо число $r > 0$ і функції $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такі, що $\operatorname{supp}\chi \subset \operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді*

$$\|\chi u, B^s_{p,\infty}(\Omega)\| \le c\left(\|\eta f, L_p(\Omega)\| + \|\eta f, B^{s-2l}_{p,\infty}(\Omega)\| + \sum_{j=1}^{l} \|\eta g_j, B^{s-m_j-1/p}_{p,\infty}(\Gamma)\| + \|\eta u, B^{s-r}_{p,\infty}(\Omega)\|\right),$$

де c — деяке додатне число, яке не залежить від u, f і $g_1,\dots,g_l$.

Запропоновано застосування цих теорем до деяких еліптичних задач з гауссовим білим шумом у крайових умовах. Ці результати отримано спільно з О.О. Мурачем в [1].

1. Мурач О. О., Чепурухіна І. С. Еліптичні задачі з грубими крайовими даними у просторах Нікольського. Доповіді НАН України, 2021, № 3. (arXiv:2103.10372).

Лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом

С. М. Чуйко, Д. Д. Д'яченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

chujko-slav@ukr.net

Досліджено задачу про побудову розв'язків [1]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ q$$

лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Тут

$$A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a, b], \quad f(t) \in \mathbb{C}[a, b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу

$$\ell z(\cdot) := \sum_{i=0}^{q} \ell_i z(\cdot) : \mathbb{C}^1\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^k,$$

крім того

$$\ell_i z(\cdot) : \mathbb{C}^1[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^k, \ \ i = 0,\ \ldots\ ,\ p-1,\ \tau_0 := a,$$

а також

$$\ell_q z(\cdot) :\ \mathbb{C}^1[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^k$$

— лінійні обмежені векторні функціонали. Поставлена задача продовжує дослідження лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом [1] на випадок крайової задачі (1) з прямокутною матрицею при похідній [3], в тому числі — матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач [4], зокрема, з імпульсним впливом [5]. На відміну від матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач з імпульсним впливом, досліджених у статті [5], розглянуто випадок виродження [6,7].

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition. — Berlin-Boston, De Gruyter, 2016, 298 p.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк, 1987, 287 с.
3. Chuiko S.M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Journal of Mathematical Sciences, 2018, 235, No. 1, 2 – 18.
4. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. Differential Equations, 2001, 37, No. 4, 464 – 471.
5. Chuiko S.M., Dzyuba M.V. Matrix boundary-value problem with pulsed action. Journal of Mathematical Sciences, 2019, 238, No. 3, 333 – 343.
6. Chuiko S.M. Solvability of Cauchy problem for a differential-algebraic system with concentrated delay. Russian Mathematics, 2019, 63, No. 12, 80 – 95.
7. Chuiko S.M. A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. Siberian Advances in Mathematics, 2020, No. 30, 177 – 191.

Слабконелінійна різницево-алгебраїчна крайова задача у випадку параметричного резонансу

С. М. Чуйко, Я. В. Калініченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

chujko-slav@ukr.net

Досліджено задачу про знаходження обмежених розв'язків [1,2]

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega := \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \omega\}, \quad z(k,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

та власної функції $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ нелінійної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь

$$A(k)z(k+1,\varepsilon) = B(k)z(k,\varepsilon) + f(k) + \varepsilon Z(z(k,\varepsilon),h(\varepsilon),k,\varepsilon), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

у малому околі розв'язку породжуючої нетерової ($p \neq n$) крайової задачі

$$A(k)z_0(k+1) = B(k)z_0(k) + f(k), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p. \tag{3}$$

Тут $A(k), B(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — взагалі кажучи, прямокутні ($m \neq n$), обмежені матриці; якщо ж матриця $A(k)$ квадратна ($m = n$), то припускаємо її виродженою; $f(k)$ — дійсний обмежений вектор-стовпець, нелінійна функція $Z(z(k,\varepsilon),h(\varepsilon),k,\varepsilon)$ неперервно-диференційовна за невідомими $z(k,\varepsilon)$ та $h(\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі та у малому околі точки $h_0 := h(0) \in \mathbb{R}^q$ і обмежена за незалежною змінною, а також неперервна за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі обмежених функцій, $J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений векторний функціонал, неперервно-диференційовний (по Фреше) за невідомими $z(k,\varepsilon)$ та $h(\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі та у малому околі точки $h_0 := h(0) \in \mathbb{R}^q$, а також неперервний за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$.

Поставлена задача (1), (2) є узагальненням задачі, розв'язаної О.А. Бойчуком [2], а також аналогом нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [4,5]. Таким чином, основною відмінністю поставленої задачі є вивчення умов розв'язності різницево-алгебраїчних крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від власної функції різницево-алгебраїчного рівняння. Використовувана класифікація різницево-алгебраїчних крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від простоти або кратності рівняння для породжуючих констант істотно відрізняється від аналогічної класифікації періодичних задач у випадку параметричного резонансу [4] і відповідає загальній класифікації нетерових крайових задач [1,2,3,5].

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition. — Berlin-Boston, De Gruyter, 2016, 298 p.
2. Бойчук А.А. Краевые задачи для систем разностных уравнений. Укр. мат. журн., 1997, 49, No. 6, 832 – 835.
3. Чуйко С.М., Чуйко О.В., Калініченко Я.В. Нелінійна різницево-алгебраїчна крайова задача у випадку параметричного резонансу. Нелінійні коливання, 2021, 24, №1, 128 – 140.
4. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972, 720 с.
5. Chuiko S.M. Nonlinear Noetherian boundary-Value problem in the case of parametric resonance. Journal of Mathematical Sciences, 2015, 205, No. 6, 859 — 870.

Слабконелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі

С. М. Чуйко, В. О. Кузьміна

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

chujko-slav@ukr.net

Досліджено задачу про побудову розв'язків [1]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t)\int_a^b F(y(s), y'(s), s)\, ds + f(t), \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{\upsilon}. \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y_0'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі

$$A(t)y_0'(t) = B(t)y_0(t) + f(t), \quad \ell y_0(\cdot) = \alpha.$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}^2_{m\times n}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{m\times q}[a;b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a;b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу. Нелінійна вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ двічі неперервно-диференційовна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (1), (2) та його похідною $y'(t)$ в околі розв'язку породжуючої крайової задачі та його похідної, а також неперервна за третім аргументом на відрізку $[a;b]$;

$$\ell y(\cdot) : \ \mathbb{D}^2[a;b] \to \mathbb{R}^{\upsilon}$$

— лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a;b]$ n-вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій [1]. Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі [2,3] на випадок нелінійної крайової задачі (1), (2) з прямокутною матрицею при похідній.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition. — Berlin-Boston, De Gruyter, 2016, 298 p.
2. Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. Укр. мат. журн, 1996, 48, № 11, 1576 – 1579.
3. Чуйко С.М., Чуйко О.В., Кузьміна В.О. Невироджені лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. Буковинський математичний журнал, 2020, 8, № 2, 127 – 138.

Слабконелінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем

С. М. Чуйко[1], **О. В. Нєсмєлова**[2]

[1]Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

[2]Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, Україна

chujko-slav@ukr.net,star-o@ukr.net

Досліджено задачу про побудову розв'язків

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\ z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі [1,2,3]

$$A(t)z'(t,\varepsilon)=B(t)z(t,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon),\quad \ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha+\varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Розв'язки крайової задачі (1) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t)\in\mathbb{C}^1[a,b]$ породжуючої нетерової $(n\neq k)$ крайової задачі

$$A(t)z_0'(t)=B(t)z_0(t)+f(t),\quad \ell z_0(\cdot)=\alpha.$$

Тут $A(t),\ B(t)\in\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — неперервні матриці, $f(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ — неперервний вектор; $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелінійна функція, неперервно-диференційовна за невідомою $z(t,\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t\in[a,b]$ і неперервна по малому параметру; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійний і $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійний векторний функціонали, $\ell z(\cdot,\varepsilon),\ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon):\ \mathbb{C}[a,b(\varepsilon)]\to\mathbb{R}^k$, причому другий функціонал неперервно-диференційовний за невідомою $z(t,\varepsilon)$ і неперервний по малому параметру ε в малому околі розв'язку породжуючої задачі та на відрізку $[0,\varepsilon_0]$.

Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) узагальнює численні постановки нелінійних крайових задач [1,2]. Нами досліджено випадок виродженості [3] породжуючої крайової задачі, а саме: $P_{A^*}(t)\neq 0$; у припущенні, що матриця $A(t)$ має сталий ранг, а саме:

$$1\leq \operatorname{rank} A(t)=\sigma_0;$$

тут $P_{A^*}(t)$ — ортопроектор [1]:

$$P_{A^*}(t):\mathbb{R}^m\to\mathbb{N}(A^*(t)).$$

Вироджена система (1), взагалі кажучи, не розв'язна відносно похідної. Нами знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Побудовано вдосконалену класифікацію та збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, 2-th edition. — Berlin-Boston, De Gruyter, 2016, 298 p.
2. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Вироджені нелінійні крайові задачі. Укр. мат. журн., 2009, 61, № 9, 1174 – 1188.
3. Chuiko S.M., Nesmelova O.V. Nonlinear boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems. Journal of Mathematical Sciences, 2021, 252, No. 4, 463 – 471.

Probability and Statistics

Теорія ймовірностей і математична статистика

Limit theorems in allocation scheme with even number of particles in each cell

F. A. Abdushukurov

Yeoju Technical Institute In Tashkent, Tashkent, 100121 Uzbekistan.

fayz.abdushukurov@mail.ru

We consider allocation scheme of $2n$ distinguishable particles by N different cells under the condition: each cell contains even number of particles. We show that this scheme is a general allocation scheme defined by random variable ξ_i with the distribution $P(\xi_i = 2k) = \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!ch(\alpha)}$, $k = 0, 1, 2 \ldots.$ Let $\mu_{2r}(N, K, n)$ be a number of cells from the first K cells which contain $2r$ particles. We prove that under some type convergence of n, K, N to infinity $\mu_{2r}(N, K, n)$ converges in distribution to Poisson random variable. The limit Poisson random variable is described.

Let n, N be integer numbers. A homogeneous allocation scheme of n distinguishable particles by N different cells is named the random variables $\eta'_1, \ldots, \eta'_N$, with the joint distribution defined by formula

$$P\{\eta'_1 = k_1, \ldots \eta'_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_N!} \left(\frac{1}{N}\right)^n,$$

where $k_1, k_2, \ldots k_N$ are nonnegative integer number such that $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = n$. Many papers deal with limit theorems for allocation scheme of distinguishable paticles by different cells (see, [1,2], and references).

We will consider the random variables $\eta_1, \ldots, \eta_N$, with the joint distribution defined by formula

$$P\{\eta_1 = 2k_1, \ldots \eta_N = 2k_N\} =$$
$$= P\{\eta'_1 = 2k_1, \ldots \eta'_N = 2k_N \mid \eta'_i \text{ takes even values}, 1 \le i \le N\}, \tag{1}$$

where $k_1, k_2, \ldots k_N$ are nonnegative integer number such that $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = n$.

Observe that the scheme (1) is an allocation scheme of $2n$ distinguishable particles by N different cells under the condition: each cell contains even number of particles.

Denote: $\xrightarrow{d}$ is a convergence in distribution, $Pi(\beta)$, $0 < \beta < \infty$, is a Poisson random variable with the parameter β. The aim of this paper is to prove that in the scheme (1) under some condition

$$\mu_{2r}(N, K, n) \xrightarrow{d} Pi(\beta).$$

1. Kolchin V. F., Sevast'yanov B. A., Chistiakov V. P. Random allocations. — Washington, DC: V. H. Winston& Sons, 1978, 262 p.
2. Abdushukurov F. A. Poisson limit theorems in allocation schemes of distinguishable particles. Ufimsk. Mat. Zh., 2020, 12, No. 3, 3–10.

On the correlation functions of the characteristic polynomials of real random matrices with independent entries

I. Afanasiev

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

afanasiev@ilt.kharkov.ua, ie.afanasiev@gmail.com

The talk is concerned with real random matrices $M_n = (x_{jk})$ which entries are independent identically distributed real random variables with zero mean and unit variance. We consider the correlation functions of the characteristic polynomials (correlation functions for short) of these matrices

$$\mathsf{f}_m(z_1, \ldots, z_m) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n - z_j\right)\left(M_n - z_j\right)^* \right\},$$

where $\mathbf{E}$ is an expectation. Despite these functions are not local, they can shed light on the asymptotic behavior of eigenvalues in the local regime. Moreover, the correlation functions are of independent interest.

The asymptotic behavior of the correlation functions is established in the form of a certain integral over unitary self-dual matrices with respect to the invariant measure. The integral is computed in the case of the second order correlation function, i.e. for $m = 2$. The main result is

Theorem 1. *Let the first four moments of the common distribution of entries of M_n be finite and $z_j = z_0 + \dfrac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, $z_0 \in (-1, 1)$. Then the correlation function of the characteristic polynomials f_2 satisfies the asymptotic relation*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \frac{\mathsf{f}_2(z_1, z_2)}{\mathsf{f}_1(z_1)\mathsf{f}_1(z_2)} = C e^{\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_4} \frac{\mathrm{Pf}(K(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^2}{\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)},$$

where C is some constant, which does not depend on the common distribution of entries and on ζ_1, ζ_2; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\} - 3$, Pf is a Pfaffian, $\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)$ is a Vandermonde determinant of ζ_1, ζ_2, $\overline{\zeta}_1$, $\overline{\zeta}_2$ and

$$K(\zeta_j, \zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2} - \frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j - \zeta_k)e^{\zeta_j \zeta_k} & (\zeta_j - \overline{\zeta}_k)e^{\zeta_j \overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j - \zeta_k)e^{\overline{\zeta}_j \zeta_k} & (\overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_k)e^{\overline{\zeta}_j \overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

From the obtained asymptotics it is clear that the correlation functions behave like that for the Real Ginibre Ensemble up to a factor depending only on the fourth absolute moment of the common probability law of the matrix entries.

Acknowledgements The author is supported by the Akhiezer Foundation scholarship and by the NASU scholarship for young scientists.

Asymptotic properties of the Hurst and diffusion parameters estimators in fractional stochastic heat equation

D. A. Avetisian, K. V. Ralchenko

Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

diana.avetisian2017@gmail.com, k.ralchenko@gmail.com

We investigate the following stochastic partial differential equation driven by fractional Brownian motion $B^H = \{B^H_x, x \in \mathbb{R}\}$ with the Hurst index $H \in (0,1)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t,x) = \sigma \dot{B}^H_x,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = 0.$$

The solution is given by

$$u(t,x) = \sigma \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G(t-s, x-y)\, ds\, dB^H_y, \quad t \ge 0,\ x \in \mathbb{R},$$

where $G(t,x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$ is the Green function. We prove the stationarity and ergodicity of the solution $u(t,x)$ as a function of the spatial variable x by analyzing the behavior of the covariance function. Based on the these properties, we consider estimation problem of the parameter (H,σ) assuming that the process $u(t,x)$ is observed at equidistant spatial points $x_k = k\delta$, $\delta > 0$, for two fixed times t_1 and t_2.

Let us denote

$$\widehat{V}_N(t) = \sum_{k=1}^N u(t,x_k)^2, \qquad v(t,H) = \frac{t^{H+1} 2^{H+1} (2^H - 1) \Gamma(H + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(H+1)}.$$

We prove that for any $H \in (0,1)$, the statistics

$$\widehat{H}_N = \frac{\log\left(\widehat{V}_N(t_1) \,/\, \widehat{V}_N(t_2)\right)}{\log(t_1/t_2)} - 1, \qquad \hat{\sigma}^2_N = \frac{\widehat{V}_N(t_1)}{N v(t_1, \widehat{H}_N)} = \frac{\widehat{V}_N(t_2)}{N v(t_2, \widehat{H}_N)}$$

are strongly consistent estimators of the parameters H and σ^2 as $N \to \infty$. Moreover, we establish the asymptotic normality of the estimator $(\widehat{H}_N, \hat{\sigma}^2_N)$ in the case $H \in (0, \frac{3}{4})$. Our construction generalizes to the fractional case the results of [1], where a similar problem for the stochastic heat equation with white noise was considered.

Acknowledgement. The second author is supported by the National Research Fund of Ukraine under grant 2020.02/0026.

1. D. Avetisian, G. Shevchenko, Estimation of diffusion parameter for stochastic heat equation with white noise. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2018, 3, 9–16.
2. D. Avetisian, K. Ralchenko, Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2020, 7, No. 3, 339–356.

Asymptotic behavior of solutions to stochastic differential equations with interaction

M. A. Belozerowa
Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine
Marbel@ukr.net

The main object under investigation is two-dimentional stochastic differential equation (SDE) with interaction

$$\begin{cases} dx(u,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x(u,t)-v)\mu_t(dv)dt + b(x(u,t),\mu_t)dw(t) \\ x(u,0) = u, \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\mu_0 \in \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2$ is the space of all probability measures on $\mathbb{R}^2$ having the first moment, with the Wasserstein distance [1],

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

w_k are one-dimensional independent Wiener processes, $b_k : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}$ $(k = 1,2)$ being global Lipschitz and for some $\alpha_1, \alpha_2, B_1, B_2 > 0$ and for all $u, v \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, $\mu_t \in \mathfrak{M}_2$

$$-\alpha_1\|u-v\|^2 \le (u-v, \varphi(u)-\varphi(v)) \le -\alpha_2\|u-v\|^2;$$

$$B_1\|u-v\|^2 \le (u-v, b(u,\mu_t)-b(v,\mu_t)); \ \|b(u,\mu_t)-b(v,\mu_t)\| \le B_2\|u-v\|, \ \alpha_k - B_j^2 \ge 0 \ (k,j=1,2).$$

In monograph [2] the conditions of existence and uniqueness of solutions to equation (1) in d-dimentional case have been obtained, the properties of solutions have been established.

The limit behavior of solutions to SDE with interaction in one-dimensional case have been studied in [3]. The aim of the work is to investigate the two-dimensional case. The following result characterizes the distance between trajectories $x(u,\cdot)$ and $x(v,\cdot)$ on infinity.

Theorem 1. *For all $u, v \in \mathbb{R}^2$ there exists*

$$\lim_{t\to\infty} \left(||x(u,t)-x(v,t)|| - \int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s), x(u,s), \mu_s\right) ds \right) \quad a.e.$$

Here

$$\Phi(r,q,\mu_s) = \frac{1}{||q-r||} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (q-r, \varphi(q-v)-\varphi(r-v))\,\mu_s(dv) +$$

$$+ \frac{||b(q,\mu_s)-b(r,\mu_s)||^2}{2||q-r||} - \frac{(q-r, b(q,\mu_s)-b(r,\mu_s))^2}{2||q-r||^3}.$$

1. Dorogovtsev A. A. Measure-valued Markov processes and stochastic flows on abstract spaces. Stoch. Rep., 76, No. 5, 395–407.
2. Dorogovtsev A. A. Measure-valued processes and stochastic flows [in Russian]. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its Applications, 66. — K.: Institut Matematiki, 2007, 289 p.
3. Lagunova M. P. Stochastic differential equations with interaction and the law of iterated logarithm. Theory of stochastic Processes, 2012, 18(34), No. 2, 54–58.

L^p AND ALMOST SURE CONVERGENCE OF AN APPROXIMATE METHOD BASED ON THE TAYLOR EXPANSION OF THE COEFFICIENTS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME-DEPENDENT DELAY

D. D. Djordjević

University of Niš, Faculty of sciences and mathematics, Department of mathematics, Niš, Serbia

djoledj91@gmail.com

A class of stochastic differential equations with time-dependent delay on a finite time interval is considered. In this paper, the polynomial conditions are considered, instead of the usual assumptions that both the drift and diffusion coefficient satisfy the Lipschitz and linear growth conditions, as well as the assumption of the moment boundedness of the solution to the initial equation. An approximate equation is considered for any partition of the time interval. That equation has coefficients that are Taylor expansions of the coefficients of the initial equation. The solutions of thusly constructed equations converge in the L^p sense and almost surely towards the solution of the initial equation and the rate of the convergence is presented if those solutions satisfy some moment bounds. The rate of convergence increases if the orders of Taylor approximations for the drift and diffusion coefficient increase simultaneously.

On the distribution of the first passage time over state-dependent levels for a Markov modulated Kou process

Ie. Karnaukh

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine

ievgen.karnaukh@gmail.com

Markov modulated Kou process is a bivariate Markov process $Z_t = \{X_t, J_t\}$, where $\{J_t, t \geq 0\}$ is an irreducible Markov chain with the finite state space $\{1, \ldots, N\}$, the transition rate matrix $Q = ||q_{ij}||_{i,j=1}^N$, and the initial stationary distribution π. X evolves as a double-exponential jump diffusion process ξ_i while J is in the state i. $\{\xi_i(t)\}_{i=1}^N$ are independent processes with drifts a_i, volatilities σ_i^2, jump rates λ_i, and densities of jumps $f_i(x) = p_i\beta_i^+ e^{-\beta_i^+ x} I_{\{x\geq 0\}} + (1-p_i)\beta_i^- e^{\beta_i^- x} I_{\{x<0\}}$. The process X is characterized by $\|E[e^{rX_t} I_{\{J_t=j\}}|J_0 = i]\| = e^{K[r]t}$, where $K[r] = diag\left(ra_i + r^2\frac{\sigma_i^2}{2} + \frac{\lambda_i p_i r}{\beta_i^+ - r} - \frac{\lambda_i(1-p_i)r}{\beta_i^- + r}\right)_{i=\overline{1,N}} + Q$.

Let $\tilde{Z}_t = \{\tilde{X}_t, \tilde{J}_t\}$ be the fluid-embedding of Z with cumulant in block notation

$$\tilde{K}[r] = \begin{pmatrix} diag\left(r - \beta_i^+\right)_{i=\overline{1,N}} & diag\left(\beta_i^+\right)_{i=\overline{1,N}} & 0 \\ diag\left(\lambda_i p_i\right)_{i=\overline{1,N}} & diag\left(a_i r + \frac{\sigma_i^2}{2} r^2 - \lambda_i\right)_{i=\overline{1,N}} + Q & diag\left(\lambda_i\left(1-p_i\right)\right)_{i=\overline{1,N}} \\ 0 & diag\left(\beta_i^-\right)_{i=\overline{1,N}} & -diag\left(r + \beta_i^-\right)_{i=\overline{1,N}} \end{pmatrix}.$$

The fluid-embedding we get from Z by changing exponential jumps of X to segments with slope 1 and extending the state space of J to $\{1, \ldots, 3N\}$, see [1]. This process is a Markov-modulated Brownian motion (MMBM).

Define the first passages over state-dependent levels $b \in \mathbb{R}^N$ and $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{3N}$ as $T = \inf\{t \geq 0 : X_t > b_{J_t}\}$ and $\tilde{T} = \inf\left\{t \geq 0 : \tilde{X}_t > \tilde{b}_{\tilde{J}_t}\right\}$. Assume that $\tilde{b}_i = \tilde{b}_{i+m} = \tilde{b}_{i+2m} = b_i$, $i = \overline{1,N}$, and write $\eta_t = \inf\left\{u \geq 0 : \int_0^u I_{\left\{\tilde{J}_u \in \{m+1,\ldots,2m\}\right\}} du > t\right\}$, then $P\{T < t | J_0 = i\} = P\left\{\tilde{T} < \eta_t | \tilde{J}_0 = m + i\right\}$, see [2]. Following [3] (see also [4]), the asymptotic behavior of a MMBM depends on the stationary drift $\tilde{m}_1^0 = \tilde{\pi}\tilde{K}'[0]e$, where e is the column vector with all entries equal to 1. If $\tilde{m}_1^0 \geq 0$, then $P\{T < \infty | J_0 = i\} = 1$, and if $\tilde{m}_1^0 < 0$, then $P\{T = \infty | J_0 = i\} > 0$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. For $0 < t < \infty$,

$$P\{T < t | J_0 = i\} = F(0) - L^{-1}\left(\delta^{-1}(F(0) - F(\delta))\right),$$

where $F(\delta) = E[e^{-\delta T}, T < \infty | J_0 = i]$ and L^{-1} means the Laplace inversion with respect to δ.

1. Breuer L. First passage times for Markov-additive processes with positive jumps of phase type. J. Appl. Prob., 2008, 45, 779 – 799.
2. Jiang, Z., Pistorius, M. R. On perpetual American put valuation and first-passage in a regime-switching model with jumps. Finance and Stochastics, 2008, 12, 331 – 355.
3. Gusak D. V. The distribution of absolute maximum for Poisson and Wiener processes on a Markov chain [in Russian]. Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the 1974 European Meeting of Statisticians, 1977, Vol. A, 211 – 219.
4. Ivanovs J. One-sided Markov Additive Processes and Related Exit Problems. PhD dissertation, University of Amsterdam. — Oisterwijk: Uitgeverij BOXPress, 2011, 127 p.

Stochastic block model in a new critical regime

Vitalii Konarovskyi
Institute of mathematics of NAS of Ukraine
konarovskiy@gmail.com

In this talk, we will discuss a novel phase transition regime for the classical stochastic block model (SBM). Let us briefly recall the basic SBM model with m classes, frequently denoted by $G(n, p, q)$. The issued random graph has the set of vertices divided (in a deterministic way) into m subsets (*classes* or blocks) of equal size (here we set this size to n and therefore there are mn vertices in total), and a random set of edges, where the edges are drawn independently, and the intra (resp. inter) class edges are drawn with probability p (resp. q). We consider large graphs (n will diverge to ∞), and the connectivity parameters p and q will depend on n. There is one considerable difference in the connectivity parameter scaling (as n diverges) in our work with respect to that in [1], applied to finite-type graphs. Like in [1], here p_n scales inversely proportionally to n, but unlike in [1] our q_n is of much smaller asymptotic order (notably it scales like $n^{-4/3}$). Regimes where $q_n << p_n$ seem quite natural from the perspective of applications (in view of the formation of clusters in networks).

For $t \in \mathbb{R}$, $u \geq 0$ and $n \geq n_0$ sufficiently large, let $\tilde{\zeta}^{(n)}(t, u)$ denote the vector of decreasingly ordered component sizes of $G(n, n^{-1} + tn^{-4/3}, un^{-4/3})$. Let also

$$\zeta^{(n)}(t, u) = n^{-2/3}\tilde{\zeta}^{(n)}(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \geq 0, \quad n \geq n_0.$$

We consider $\zeta^{(n)}(t, u)$ to be a random element of l_2 (for this we append infinitely many zero entries). The main results reads as following.

Theorem 1. *For every $t \in \mathbb{R}$ and $u \geq 0$,*

$$\zeta^{(n)}(t, u) \to \zeta(t, u) \quad \textit{as} \quad n \to \infty$$

in distribution with respect to the topology on l_2, where $\zeta(t, u)$ can be defined via m independent multiplicative coalescents with interaction.

This is the joint work with Vlada Limic [2].

1. Bollobás B., Janson Sv., Riordan O. The phase transition in inhomogeneous random graphs. Random Structures Algorithms, 2007, 31, No. 1, 3–122.
2. Konarovskyi V., Limic V. Stochastic block model in a new critical regime and the interacting multiplicative coalescent. Electron. J. Probab., 2021, 26, No. 1, 23.

On the spectral gap for Brownian motion on domains with sticky-reflecting boundary diffusion

V. Marx
Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik, Germany
marx@math.uni-leipzig.de

The talk is based on a joint work with Vitalii Konarovskyi and Max von Renesse (Univ. Leipzig).

The aim of the talk is to propose a simple but robust method to get estimates of the spectral gap for Brownian motion on a smooth domain Ω with a sticky-reflecting diffusion along the boundary $\partial\Omega$. In simple cases such processes correspond to Feller semigroups on $C_0(\overline{\Omega})$ with generator $(\mathcal{D}(A), A)$

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in C_0(\Omega) \,|\, A(f) \in C_0(\Omega)\}$$
$$A(f) = \Delta f \mathbb{I}_\Omega + (\Delta^\tau f - \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu})\mathbb{I}_{\partial\Omega}$$

where $\frac{\partial}{\partial \nu}$ is the outer normal derivative, Δ^τ denotes the Laplace-Beltrami operator on the boundary $\partial\Omega$ and $\gamma > 0$. An efficient process construction was given by Grothaus and Voßhall via Dirichlet forms in [1].

In the two extreme cases, when γ tends either to 0 or to ∞, our problem reduces to estimate the spectral gap σ_0 of Brownian motion on the surface $\partial\Omega$ and the spectral gap σ_∞ of reflecting Brownian motion on Ω, respectively. The method that we propose yields an estimate from below of the spectral gap σ_γ of the above process, using only σ_0 and σ_∞ and estimates for certain bulk-boundary interaction terms which are independent of γ. We will show that the method leads to good results in the case of the Euclidean ball in $\mathbb{R}^d$ and we apply the method to two less classical cases: a ball with partial sticky-reflecting diffusion on the sphere and a ball with a needle.

1. Grothaus M., Voßhall R. Stochastic differential equations with sticky reflection and boundary diffusion. Electron. J. Probab., 2017, 22, No. 7, 37.
2. Ventcel A. D. On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes. Theor. Probability Appl., 1959, 4, 164–177.

L^q-convergence of the truncated Euler–Maruyama approximate solutions for a class of highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay

A. Petrović, M. Milošević

[1] University of Niš, Faculty of Science and Mathematics, Niš, Serbia

aleksandra.ana.pet@gmail.com, 27marija.milosevic@gmail.com

In the existing literature, the Khasminskii-type conditions are successfully employed in the analysis of different numerical methods for stochastic differential equations and these conditions allows the coefficients of the equations to be highly nonlinear (see [1], [2], [3], [4], for example). Because of that, the main aim of this talk is to present the L^q-convergence result of the truncated Euler–Maruyama method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay under that condition. The proofs of all assertions are affected by the presence of the neutral term and delay function and they require for the neutral term to be contractive mapping and for the delay function to be Lipschitz continuous, among other conditions. Moreover, the relation between the truncated Euler–Maruyama method under these conditions and the classical Euler–Maruyama method under the global Lipschitz condition is established. The main theoretical result, that is, the L^q-convergence is illustrated by an example.

1. Hu L., Li X., Mao X., Convergence rate and stability of the truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations, J. Comput. Appl. Math., 2018, 337, 274 – 289.
2. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. — Chichester: Horvood Publ., 1997, 366 p.
3. Mao X. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations, J. Comput. Appl. Math., 2015, 290, 370 – 384.
4. Milošević M. Highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the Euler–Maruyama method, Math. Comput. Modelling, 2011, 54, 2235 – 2251.

Development of renewal theory for the early generations of an iterated perturbed random walk on a general branching process tree

Bohdan Rashytov
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
mr.rashytov@gmail.com

Investigation of iterated perturbed random walks on a general branching process tree was initiated in [1]. Continuing this line of research, we are concerned in [2] with a new specific case, not treated in [1], and prove counterparts of the classical renewal-theoretic results for the corresponding counting processes. In this talk, we shall present some of the results obtained.

Let $(\xi_i, \eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be independent copies of a $\mathbb{R}^2$-valued random vector (ξ, η) with arbitrarily dependent components. Denote by $(S_i)_{i\geq 0}$ the zero-delayed standard random walk with increments ξ_i for $i \in \mathbb{N}$, that is, $S_0 := 0$ and $S_i := \xi_1 + \cdots + \xi_i$ for $i \in \mathbb{N}$. Define

$$T_i := S_{i-1} + \eta_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

The sequence $T := (T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is called *perturbed random walk*.

Now we define a general branching process generated by T:

- at time 0 there is one individual, the ancestor;
- the ancestor produces the first generation with birth times given by the points of T;
- the first generation produces the second generation, the shifts of birth times of the second generation individuals with respect to their mothers' birth times are distributed according to copies of T, and for different mothers these copies are independent;
- the second generation produces the third one, and so on;
- all individuals act independently of each other.

For $t \geq 0$ and $j \in \mathbb{N}$, denote by $T^{(j)}$ and $N_j(t)$ some enumeration of the birth times and the number of individuals with birth times $\leq t$ in the jth generation, respectively. Put $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$. For each integer $j \geq 2$, the sequence $T^{(j)}$ and the process N_j are a natural generalization of the perturbed random walk T and the counting process $(N_1(t))_{t\geq 0}$. We call the sequence $(T^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *iterated perturbed random walk on a general branching process tree.*

Further, we give the classification of generations. Following [1], we call the jth generation *early*, *intermediate* or *late* depending on whether j is fixed, $j = j(t) \to \infty$ and $j(t) = o(t)$ as $t \to \infty$, or $j = j(t)$ is of order t. In view of Proposition 2.1 [1] there are no other generations.

In [1] the authors prove counterparts of the elementary renewal theorem, the Blackwell theorem and the key renewal theorem for some intermediate generations. In [2] we investigate early generations. Although the analysis of early generations is simpler than that of intermediate generations, we solve in [2] a larger collection of problems. In addition to the aforementioned counterparts of the classical results, we investigate the asymptotics of the variance $\operatorname{Var} N_j(t)$, prove a strong law of large numbers for $N_j(t)$ and a functional limit theorem for the vector-valued process $(N_1(ut), N_2(ut), \ldots, N_k(ut))_{u\geq 0}$ for each $k \in \mathbb{N}$, properly normalized and centered.

1. Bohun V., Iksanov A., Marynych A., Rashytov B. Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations. (arXiv: 2012.03341).
2. Iksanov A., Rashytov B., Samoilenko I. Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: early generations. (arXiv: 2105.02846).

Constructing coalescing stochastic flows

Georgii Riabov
Institute of mathematics of NAS of Ukraine
ryabov.george@gmail.com

Let $\psi = \{\psi_{s,t} : -\infty < s \le t < \infty\}$ be a stochastic flow on a locally compact separable metric space M, that is a family of measurable random mappings of M such that $\psi_{s,t}(\psi_{r,s}(x)) = \psi_{r,t}(x)$ a.s., $\psi_{s,s}(x) = x$ a.s., for any sequence $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ mappings $\psi_{t_1,t_2}, \ldots, \psi_{t_{n-1},t_n}$ are independent, for any $s < t$ mappings $\psi_{s,t}$ and $\psi_{0,t-s}$ are equally distributed. The fundamental theorem of Y. Le Jan and O. Raimond [1] establishes a one-to-one correspondence between sconsistence sequences $\{P^{(n)} : n \ge 1\}$ of coalescing Feller transition probabilities and stochastic flows on M satisfying mild regularity conditions. The one-to-one correspondence is given by the formula

$$P^{(n)}(x, B) = \mathbb{P}((\psi_{0,t}(x_1), \ldots, \psi_{0,t}(x_n)) \in B), n \ge 1, x \in M^n, B \in \mathcal{B}(M^n),$$

where $\{P^{(n)} : n \ge 1\}$ is a consistence sequences of coalescing Feller transition probabilities.

We are interested in the existence of a strong stochastic flow that corresponds to a consistent sequence $\{P^{(n)} : n \ge 1\}$ of coalescing Feller transition probabilities. By a strong flow we understand a stochastic flow ψ such that

for all $\omega \in \Omega, x \in M, r \le s \le t$,

$$\psi_{s,t}(\omega, \psi_{r,s}(\omega, x)) = \psi_{r,t}(\omega, x),\ \psi_{s,s}(\omega, x) = x.$$

Existence of a strong stochastic flow is well-known when its finite-point motions are families of solutions of an SDE with smooth enough coefficients (see [2]). In general the existence of a strong flow is an open problem. We will deal with flows in which coalescence occurs.

By $\mathbb{P}^{(n)}_x$ we will denote the distribution of the Feller process $X^{(n)}$ in M^n that has transition probabilities $P^{(n)}$ and starts from $x \in M^n$.

Theorem 1. *Let M be a metric graph. Assume that transition probabilities $P^{(n)}$ satisfy following properties:*

- *for any $x \in M$ and $\epsilon > 0$ $P^{(1)}_t(x, B(x, \epsilon)^c) = o(t),\ t \to 0+$;*
- *for any compact $K \subset M$ and any $t > 0$*

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{n \ge 1, x \in K^n} \mathbb{P}^{(n)}_x(\# X^{(n)}(t) \ge c) = 0.$$

Then there exists a strong stochastic flow that corresponds to the sequence $\{P^{(n)} : n \ge 1\}$.

1. Le Jan Y., Raimond O. Flows, coalescence and noise. The Annals of Probability, 2004, 32, No. 2, 1247–1315.
2. Kunita H. Stochastic flows and stochastic differential equations. —Cambridge, Cambridge University Press, 1990, 346 p.

Додаткова сингулярність ядра при знаходженні наближеної оцінки параметра

Г. С. Железняк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, Київ, Україна

hanna.zhelezniak@gmail.com

Розглянемо лінійну модель з неперервним часом [3]

$$X_t = \theta t + \sigma_1 B^{H_1}(t) + \sigma_2 B^{H_2}(t), \quad t \in [0, T],$$

де B^{H_1} та B^{H_2} – два незалежні дробові броунівські рухи з різними індексами Хюрста, що задовольняють умові $1/2 \leq H_1 < H_2 < 1, \sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Основна задача полягає у знаходженні наближеної оцінки параметра $\theta \in \mathbb{R}$

$$\hat{\theta}(T) = \frac{N(T)}{\delta_{H_1} \langle N \rangle (T)},$$

де $\mathfrak{F}_t^X = \sigma\{X(t), t \in [0, T]\}$ – задана σ-алгебра, $N(T) = \int_0^T h_T(t) dX(t)$ з $h_T(t) t^{\frac{1}{2} - H_1} \in L_2[0, T]$, $\langle N \rangle (T) = C_0 \int_0^T h_T(t) t^{1 - 2H_1} dt$ та $h_T(t)$ – єдиний розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду на проміжку $[0, T]$ з ядром виду $K(s, u) = \frac{L(s,u)}{|s-u|^{\alpha}}, \alpha \in (0, 1)$, де чисельник $L(s, u)$ обмежений і неперервний м.н. відносно міри Лебега, але може мати точки розриву на $[0, T]^2$, тобто ядром із додатковою сингулярністю:

$$h_T(u) + C_1 \int_0^T h_T(s) K(s, u) ds = 1, \quad u \in [0, T],$$

де C_0 та C_1 – деякі константи. Цю проблему було зведено до вивченої раніше [2] задачі пошуку наближеного розв'язку.

Застосовуючи добре відомі методи для таких ядер [1], [4], було доведено теорему про наближення розв'язку інтегрального рівняння з ядром, що містить додаткову сингулярність та знайдено чисельними методами оцінку параметра $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Babolian E., Arzhang Hajikandi A. The approximate solution of a class of Fredholm integral equations with a weakly singular kernel. Comput. Appl. Math. 235, 2011, No. 5, 1148 – 1159.
2. Makogin V., Mishura Y., Zhelezniak H. Approximate solution of the integral equations involving kernel with additional singularity. Stochastic and Infinite Dimensional Analysis, 2020. (arXiv:2007.01274).
3. Mishura Y., Voronov I. Construction of maximum likelihood estimator in the mixed fractional – fractional Brownian motion model with double long-range dependence. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2015, 2, 147 – 164.
4. Atkinson K. E. A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind. — Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976, 230 p.

Розмірність Гаусдорфа кластерів, які породжуються стаціонарними еволюціями Льовнера

Б. Л. Мажар

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Фізико-технічний інститут, Київ, Україна

bogdan2010ra@gmail.com

При вивченні моделей DLA, моделі Едена, в теорії перколяції тощо застосовують моделі дискретної агрегації. В роботі [1] було запропоновано зв'язок між такими моделями та розв'язками рівнянь Льовнера.
В доповіді будуть розглянуті властивості сімей кластерів, які визначаються стаціонарними еволюціями Льовнера в зовнішности одиничного диска. Позначимо одиничний диск в $\hat{\mathbb{C}}$ через $\overline{\mathbb{D}}$, межу одиничного диска через $\mathbb{T}$, доповнення одиничного диска через Δ. Для заданої ймовірнісної міри μ на $\mathbb{T}$ розглянемо рівняння Льовнера

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}d\mu_t(\zeta), \quad z\in\Delta, t\geq 0, \quad f(z,0)=z.$$

Відомо [2], що існує конформне відображення $g:\Delta\to\hat{\mathbb{C}}$, таке що $f(z,t)=g^{-1}(e^t g(z))$ при $z\in\Delta$, $t\geq 0$. Позначимо $\Delta^\epsilon=\{z\in\hat{\mathbb{C}}:|z|>1+\epsilon\}$.

Твердження 1. $\forall\epsilon>0:\exists C,\alpha>0:\forall z\in\Delta^\epsilon:|g(z)|\leq\alpha|z|^{1/C}$.

Теорема 1. *Нехай міра μ має ненульову абсолютно неперервну компоненту відносно міри Лебега λ на $\mathbb{T}$, причому на деякій дузі $L\subset\mathbb{T}$ виконується $\inf_L \frac{d\mu}{d\lambda}>0$. Тоді*

$$\inf_{z\in\Delta,\frac{z}{|z|}\in L}\left|\int_{\mathbb{T}}\frac{z+\zeta}{z-\zeta}d\mu(\zeta)\right|>0.$$

Теорема 1 дозволяє знайти розмірність Гаусдорфа кластерів, які визначаються відображеннями $f(\cdot,t)$. Позначимо $K'(t)=(\hat{\mathbb{C}}\setminus f(\Delta,t))\setminus\overline{\mathbb{D}}$.

Наслідок 1. *За умов теореми 1 існує $T>0$, таке що для всіх $t\geq T$*

$$\dim_H K'(t)=2.$$

1. Hastings M. B., Levitov L. S. Laplacian growth as one-dimensional turbulence. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1998, 116, No. 1, 244–252.
2. Sola A. Elementary examples of Loewner chains generated by densities. Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Sectio A LXVII, 2013, 83-101.

Потенціали простого шару для псевдодиференціальних рівнянь, пов'язаних з деякими α-стійкими випадковими процесами

Х. В. Мамалига

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
м. Івано-Франківськ, Україна

mamalygakhrystyna@gmail.com

Нехай $\mathbf{A}$ псевдодиференціальний оператор визначений символом $(-(Q\xi,\xi)^{\frac{\alpha}{2}})_{\xi\in\mathbb{R}^d}$, де $Q = PP^T$ деяка невироджена $d\times d$-матриця з дійсними елементами, $\alpha\in(1;2)$ — деяка стала. Функція $g(t,x,y) = \dfrac{1}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,x-y)-t(Q\xi,\xi)^{\frac{\alpha}{2}}}d\xi$ є щільністю ймовірності переходу процесу Маркова $x(t) = Px_0(t)$, де $(x_0(t))_{t\geq 0}$ — ротаційно інваріантний α-стійкий випадковий процес. Нехай в $\mathbb{R}^d$ задана деяка поверхня S та при $(t,x)\in(0;+\infty)\times S$ задана деяка функція $\psi(t,x)$. Функцію $v(t,x) = \int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)d\sigma_y$ називаємо потенціалом простого шару для псевдодиференціального рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u(t,\cdot)(x) \qquad (1).$$

Теорема 1. *Нехай поверхня S в $\mathbb{R}^d$ належить класу $H^{1+\gamma}$ з деяким $\gamma\in(0;1)$ та задовольняє одну з умов: вона обмежена і замкнута чи необмежена і така, що в кожних двох точках $x\in S$, $y\in S$ вектори зовнішніх нормалей n_x та n_y до S утворюють кут φ_{xy}, для якого $\cos\varphi_{xy}\geq\rho_0>0$. Неперервна функція $(\psi(t,x))_{t\geq0,x\in S}$ задовольняє нерівність $|\psi(t,x)|\leq K_Tt^{-\beta}$ на кожній множині виду $(0;T]\times S$ зміни аргументів $(t;x)$ з деякими сталими $\beta<1$ та $K_T>0$, яка залежить від $T>0$. Тоді потенціал простого шару $(v(t,x))_{t\geq0,x\in\mathbb{R}^d}$ визначений коректно, є неперервною функцією та при всіх $(t;x)$ з області $(0;\infty)\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$ задовольняє рівняння (1).*

Для кожного орта $\nu\in\mathbb{R}^d$ визначимо оператор $\mathbf{B}_\nu$ його символом $(i|\xi|^{\alpha-2}(\xi,\nu))_{\xi\in\mathbb{R}^d}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1. Тоді для кожного $t\geq0, x\in S$ справджується наступна рівність ($\nu(x) = Qn_x$, $\hat\nu(x) = Q^{-1}n_x$)*

$$\lim_{z\to x\pm}\mathbf{B}_{\nu(x)}v(t,\cdot)(z) = \mp\frac{1}{2}\psi(t,x) + \int_0^t d\tau\int_S \mathbf{B}_{\nu(x)}g(t-\tau,\cdot,y)(x)\psi(\tau,y)d\sigma_y,$$

де $z\to x\pm$ означає, що $z = x+\delta\hat\nu(x)$ і $\delta\to0\pm$.

Доведення цих теорем можна знайти у статті [1].

Властивості потенціалу простого шару наведені у Теоремах 1 і 2 дозволяють розв'язувати деякі початково-крайові задачі для рівняння (1). В доповіді буде розглядатися початково-крайова задача для (1) з граничною умовою

$$\mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x+) - \mathbf{B}_{\nu(x)}u(t,\cdot)(x-) = r(x)u(t,x), \quad t>0,\ x\in S$$

із заданою неперервною обмеженою невід'ємною функцією $(r(x))_{x\in S}$ та буде дана ймовірнісна інтерпретація її розв'язку.

1. Mamalyha Kh.V., Osypchuk M.M. Properties of single layer potentials for a pseudo-diferential equation related to a linear transformation of a rotationally invariant stable stochastic process. Mat. Stud., 2021, 55, No.1, 94–106.

Прогнозування демографічних показників за допомогою сплайнів

А. А. Мелекесцева
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, м. Київ, Україна
homtom.alice.2016@gmail.com

Побудовано сплайнову модель для прогнозування демографічних показників з урахуванням похибок у спостереженнях [1]. Модель має вигляд $y_i = S_0(t_i)$ для тих t_i, що відповідають точним даним, та $y_i = S_0(t_i) + \sigma\varepsilon_i$ для всіх інших t_i. Тут y_i - спостережувані величини; t_i - моменти спостережень (роки), S_0 - сплайн із заданою сіткою вузлів Δ'; $\{\varepsilon_i\}$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини з $E\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = 1$; σ - невідоме стандартне відхилення похибки. Апроксимуючий сплайн $\hat{S}$ мінімізує функціонал $Q(f) = \sum_{i=0}^{n}(y_i^0 - f(t_i))^2$ на просторі сплайнів $S(\Delta')$.

Для розглянутої моделі розроблено критерій перевірки гіпотези про відсутність передостаннього вузла сплайна, знайдено оцінку стандартного відхилення похибки, побудовано довірчий інтервал для значення сплайну у фіксованій точці t^*. Також, за допомогою методу Шеффе знайдено довірчу смугу для сплайну S_0.

Отримані результати застосовано до прогнозування зміни чисельності, народжуваності та смертності населення м. Коростеня на 2017–2020 рр. на підставі даних за 1976-2016 рр. Для аналізу чисельності населення було використано кубічні C^2-гладкі сплайни, а для аналізу народжуваності та смертності – лінійні неперервні сплайни. Здійснено підбір оптимальної кількості вузлів та оптимальної сітки вузлів, побудовано 95% довірчі інтервали та довірчі смуги для прогнозів, на рівні значущості 0.05 відхилено гіпотезу про відсутність передостаннього вузла. Справжні значення усіх трьох показників перебувають у межах 95% довірчої смуги у 2017-2019 рр. В 2020 р. народжуваність і смертність виходять за межі 95% довірчої смуги в бік зменшення, можливо, через пандемію.

1. Кукуш А. Г. Кубические одномерные сплайны в статистике: Метод. рекомендации для студентов механико-математического факультета. — Киев : КГУ, 1991, 60 с.

Побудова рівноваги Неша в несиметричній моделі гри видобутку ресурсів

І. В. Силенко

Національний університет "Києво-Могилянська Академія", Київ, Україна

i.sylenko@ukma.edu.ua

Гра видобутку ресурсів є стохастичною грою, що моделює спільне використання ресурсу агентами протягом необмеженого періоду. Станом гри у кожному з дискретних моментів t є кількість ресурсу доступного для використання. m учасників гри, спостерігаючи в момент часу t стан $s_t \in [0; +\infty)$, одночасно і незалежно один від одного приймають невід'ємні рішення про видобуток: $(x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tm})$. Гра продовжується, якщо $\sum_{i=1}^{m} x_{ti} \leq s_t$. При цьому, гравці отримують миттєві прибутки $(u_1(x_{t1}), u_2(x_{t2}), \ldots, u_m(x_{tm}))$. Загальним виграшем гравця i є нескінченна сума $\sum_{t=1}^{\infty} \beta_i^{t-1} u_i(x_{ti})$, у якій $\beta_i \in (0; 1)$ — визначений для цього гравця множник дисконтування.

Існування рівноваги Неша в несиметричному формулюванні гри з певними обмеженнями було отримано в [1]. У доповіді представлено новий результат, який стосується несиметричної моделі гри з недослідженого досі класу.

Припущення моделі:

A1: Функції корисності гравців є степеневими: $u_i(x) = c_i x^{\alpha_i}$, де $c_i \in (0; +\infty)$, $\alpha_i \in (0; 1)$.

A2: Перехід між станами є геометричним випадковим блуканням від спільної інвестиції:

$$s_{t+1} = \left(s_t - \sum_{i=1}^{m} x_{ti} \right) \cdot \xi_t,$$

де $s_t \in [0; +\infty)$ — стан гри в момент часу $t \in \mathbb{N}$, $(x_{t1}, \ldots, x_{tm})$ — відповідні стану s_t *прийнятні* рішення гравців, а $(\xi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ — послідовність незалежних реалізацій невід'ємної випадкової величини ξ, розподіл якої є відкритою інформацією;

A3: Для всіх $i \in [m]$ справджується: $\beta_i \cdot \mathbb{E}\left(\xi^{\alpha_i}\right) \in (0; 1)$.

Теорема 1. *У грі видобутку ресурсів з припущеннями* **A1-A3** *існує нерандомізована стаціонарна рівновага Неша.*

Крім факту існування, специфіка моделі дозволяє отримати алгоритм знаходження рівноваги Неша:

Алгоритм 1. *1. За допомогою чисельних методів визначити точку $z^* \in (1; +\infty)$, у якій наведена неперервна функція $g(z)$ перетворюється в 1:*

$$g(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{z^{\alpha_i}}{\beta_i \cdot \mathbb{E}\left(\xi^{\alpha_i}\right)} - m + 1 \right).$$

2. Обчислити функції вибору для кожного гравця $i \in [m]$ за формулою:

$$f_i(s) = \frac{1}{z^*} \left(\frac{(z^*)^{\alpha_i}}{\beta_i \cdot \mathbb{E}\left(\xi^{\alpha_i}\right)} - 1 \right) s.$$

Сукупність стаціонарних стратегій гравців, що відповідають функціям вибору $f_i(s)$, є рівновагою Неша в розглянутій грі.

1. Jaśkiewicz A., Nowak A. S. Stochastic games of resource extraction. Automatica, 2015, 54, 310–316.

Theory of Functions and Functional Analysis

Теорія функцій і функціональний аналіз

About connection between η-quasisymmetric homeomorphisms and K-quasiconformal mappings on Riemannian manifolds

O. S. Afanas'eva, V. V. Bilet

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NASU, Sloviansk, Ukraine

es.afanasjeva@gmail.com, viktoriiabilet@gmail.com

The boundary behavior is one of the classical problems of Complex Analysis. We investigate the problem of continuous and homeomorphic extensions of mappings between Riemannian manifolds. In particular, we study the connection between so-called η-quasisymmetric homeomorphisms and K-quasiconformal mappings.

A Riemannian manifold $(\mathbb{M}, g)$ is defined as a smooth n-dimensional connected manifold ($n \geq 2$) endowed with a Riemannian metric, i.e., a scalar product on each tangent space $T_p\mathbb{M}$, which depends smoothly on the base point p. Let $x = (x^1, \ldots, x^n)$ be local coordinates. *A Riemannian metric* is a positive definite symmetric tensor field $g = g_{ij}(x)$ defined on the local coordinates and obeying the transition rule $g_{ij}(x) = h_{kl}(f(x))\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j}$, where, as usual, $k, l = 1, \ldots, n$ are the so-called dummy indices over which the summation is performed.

The geodesic distance $d(p_1, p_2)$ between points p_1 and p_2 is the infimum of the lengths of piecewise smooth curves joining p_1 and p_2 in $\mathbb{M}$. This distance function satisfies the usual axioms of metric space.

Let now D and D' are domains in smooth connected Riemannian manifolds $(\mathbb{M}, g)$ and $(\mathbb{M}', g')$ with geodesic distances d and d', respectively.

Definition 1. Let $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be a homeomorphism. A homeomorphism $f : D \to D'$ is called *η-quasisymmetric* (abbr., η-QS homeomorphism) if the inequality

$$\frac{d'(f(x), f(y))}{d'(f(x), f(z))} \leq \eta\left(\frac{d(x, y)}{d(x, z)}\right)$$

holds for any triple $x, y, z \in D$, $x \neq z$, (see, e.g., [1]).

Given a homeomorphism f from a metric space X to a metric space Y, then for $x \in X$ and $r > 0$ set

$$H_f(x, r) = \frac{\sup\{d(f(x), f(y)) : d(x, y) \leq r\}}{\inf\{d(f(x), f(y)) : d(x, y) \geq r\}}.$$

Definition 2. A homeomorphism $f : X \to Y$ is called *K-quasiconformal* (abbr., *K-qc*) if there is a constant $K < \infty$ so that $\limsup\limits_{r\to 0} H_f(x, r) \leq K$ for all $x \in X$, (see, e.g., [2]).

Theorem 1. *Let D and D' are domains in smooth connected Riemannian manifolds $(\mathbb{M}, g)$ and $(\mathbb{M}', g')$ with geodesic distances d and d', respectively. Then the following statements hold.*

1. *If a homeomorphism $f : D \to D^{'}$ is an η-QS, then f is a K-qc mapping.*
2. *If a homeomorphism $f : D \to D^{'}$ is a K-qc mapping, then f is a locally η-QS homeomorphism in D.*

1. Väisälä J., Vuorinen M., Wallin H. Thick sets and quasisymmetric maps. Nagoya Math. J., 1994, 135, 121–148.
2. Heinonen J., Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. Acta Math., 1998, 181, No. 1, 1–61.

Vector lattices of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators

B. Akay[1], **O. Gok**[2]

[1] Department of Mathematics, Istanbul University, Istanbul, Turkey

[2] Department of Mathematics, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey

baris.akay@istanbul.edu.tr, gok@yildiz.edu.tr

The class of almost L-weakly (resp. almost M-weakly) compact operators was introduced in [1] as a generalization of L-weakly (resp. M-weakly) compact operators. In this talk, we study the vector lattices generated by positive almost L-weakly and almost M-weakly compact operators. We obtain analogous results to that of [2].

1. Bouras K., Lhaimer D., Moussa M., On the class of almost L-weakly and almost M-weakly compact operators. Positivity, 2018, 22, No. 5, 1433 – 1443.
2. Bayram E., Wickstead A. W., Banach lattices of L-weakly and M-weakly compact operators. Arch. Math., 2017, 108, No. 3, 293 – 299.

On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications

V. F. Babenko[1], Yu. V. Babenko[2], O. V. Kovalenko[1]

[1] Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine

[2] Kennesaw State University, Marietta, USA

babenko.vladislav@gmail.com, ybabenko@kennesaw.edu, olegkovalenko90@gmail.com

Let $Q\subset\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$, be a nonempty bounded open set. By $W^{1,p}(Q)$, $p\in[1,\infty]$, we denote the Sobolev space of functions $f\colon Q\to\mathbb{R}$ such, that f and all their (distributional) partial derivatives of the first order belong to $L_p(Q)$. For $x=(x^1,\dots,x^d)\in\mathbb{R}^d$ and $q\in[1,\infty)$ set $|x|_q:=\left(\sum\limits_{k=1}^d|x^k|^q\right)^{\frac1q}$, $|x|_\infty:=\max\limits_{k=1,\dots,d}|x^k|$. It is clear, that for all $f\in W^{1,p}(Q)$ we have $\|\,|\nabla f|_1\,\|_{L_p(Q)}<\infty$. For $p\in[1,\infty]$ set $W_p^\nabla(Q):=\{f\in W^{1,p}(Q)\colon \|\,|\nabla f|_1\,\|_p\le 1\}$.

We consider the case $d\ge 2$ and $p\in(d,\infty]$. We call a nonempty bounded open set $Q\subset\mathbb{R}^d$ admissible, if the imbedding of the class $W^{1,p}(Q)$ into the space of bounded continuous on Q functions holds.

For $h>0$ we set $\square_h^d:=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|_\infty<h\}$. It is easy to see that the set $\square_h^d$ is admissible. The following theorem gives an Ostrowski type inequality for functions from Sobolev class $W^{1,p}(\square_h^d)$.

Theorem 1. *Let $p\in(d,\infty]$, $\frac1p+\frac1{p'}=1$ and $f\in W^{1,p}(\square_h^d)$. Then*

$$\left|\int\limits_{\square_h^d} f(y)dy-(2h)^df(0)\right|\le c(d,p)\cdot h^{1+\frac{d}{p'}}\|\,|\nabla f|_1\,\|_{L_p(\square_h^d)},$$

where $c(d,p):=\frac1d\left\|\frac{1}{|\cdot|_\infty^{d-1}}-|\cdot|_\infty\right\|_{L_{p'}(\square_1^d)}$. The inequality is sharp. The equality holds for the function

$$f_e(y)=f_{e,h}(y)=\int\limits_0^{|y|_\infty}\left|\frac{h^{d-1}}{u^{d-1}}-\frac{u}{h}\right|^{p'-1}du.$$

We also give an application of Theorem 1 to the solution of the integral optimal recovery problem.

p-Komlós properties

Begüm Çalışkan Desova
Yeditepe University, İstanbul, Turkey
begum.caliskan@yeditepe.edu.tr

In this talk, we define p-Komlós properties in lattice-normed vector lattices (LNVL). The property which is described in the statement of Theorem 1 has been widely studied by many mathematicians. This notion was applied to different areas of mathematics which includes function theory, mathematical economics and probability theory. We extend the concept for the LNVL with up-convergence. Firstly, we investigate the notion of boundedly up-complete and give the relation between p-KB-spaces. Secondly, we obtain a characterization of a lattice-normed vector lattice which has the p-Komlós property and present the concept of p-Komlós set.

Theorem 1. *Let (x_n) be a norm bounded sequence in $L_1(P)$ where P is a probability measure. Then there exists a subsequence (y_n) of (x_n) and a function $g \in L_1(P)$ such that the Cesàro means of any subsequence of (y_n) converge to g almost everywhere.*

1. J.Komlós, A generalization of a problem of Steinhaus, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1967, 18, 217 – 229.

Adaptive approximation by sums of piecewise polynomials on sparse grids

O. Davydov[1], **O. Kozynenko**[2], **D. Skorokhodov**[2]

[1] University of Giessen, Giessen, Germany

[2] Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine

Oleg.Davydov@math.uni-giessen.de, kozinenkoalex@gmail.com, dmitriy.skorokhodov@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, be a bounded domain. We call a partition $\triangle$ of Ω *convex* if every cell $\omega \in \triangle$ is convex. For $N \in \mathbb{N}$, denote by $\mathcal{P}_N$ the set of all convex partitions of Ω comprising at most N cells.

For a function $f \in L_p(\Omega)$ we define its *N-term approximation error* by $\sigma_N(f,\mathcal{D})_p = \inf\limits_{g_i \in \mathcal{D}, i=1,\ldots,N} \Big\| f - \sum\limits_{i=1}^{N} c_i g_i \Big\|_{L_p(\Omega)}$, where $c_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, \ldots, N$ and $\mathcal{D}$ is an arbitrary set of functions in $L_p(\Omega)$ (*dictionary*). In our case of piecewise constant approximation, we consider dictionaries: $\mathcal{D}_C$ – set of characteristic functions of arbitrary convex sets, and $\mathcal{D}_S$ – set of characteristic functions of arbitrary simplexes.

It is easy to see that $\sigma_N(f,\mathcal{D}_C)_\infty \geqslant \frac{const}{N}$ for any measurable function.

It has been shown in [1] that piecewise constants on a partition which consist of N convex polyhedra provide the L_p-approximation order $O(N^{-2/(d+1)})$ for functions from Sobolev space W_q^2, where d is the number of variables, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ and $1 \leqslant q < \infty$ satisfy inequality $\frac{2}{d+1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geqslant 0$. This order cannot be further improved for any function whose Hessian is positive definite at some point [2]. This implies $\sigma_N(f,\mathcal{D}_S) = O(N^{2/(d+1)})$ for such functions. Although still suffering from the curse of dimensionality, this bound is significantly better than the standard order $O(N^{-1/d})$ expected from piecewise constants on isotropic partitions.

On the other hand, it is easy to see that piecewise constant sparse grids approximation implies $\sigma_N(\mathcal{D}_S)_p = O(N^{-1}\ln^{2(d-1)} N)$ for functions in Sobolev spaces with dominating mixed derivatives. We improve this bound and show that piecewise constant sparse grids approximation as linear combinations of Haar tensor product functions leads to to $\sigma_N(\mathcal{D}_S)_p = O(N^{-1}\ln^{3(d-1)/2} N)$ for $1 < p < \infty$. Case $d = 2$, $p = 2$ was previously proved in [3]. Also, using a modification of the sparse grid approximation by employing some techniques of [1-2], in the 2D case we improve this error from $\sigma_N(f,\mathcal{D}_S)_\infty = O(N^{-1}\ln^2 N)$ to $\sigma_N(f,\mathcal{D}_S)_\infty = O(N^{-1}\ln N)$.

1. Davydov O., Kozynenko O., Skorokhodov D. Optimal approximation order of piecewise constants on convex partitions. J. of Complexity, 2020, 58, 101444.
2. Davydov O. Approximation by piecewise constants on convex partitions. J. Approx. Theory, 2012, 164, 346 – 352.
3. Oswald P. On N-term approximation by Haar functions in H^s-norms, in Approximation and Fourier Series (S. M. Nikolskij, B. S. Kashin, A. Izaak, eds.). AFC, Russian Academy of Science, 1998.

Estimates of the products of inner radii

I. V. Denega

Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

iradenega@gmail.com

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers, let $\mathbb{C}$ be the complex plane, and let $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be its one-point compactification. Let $r(B, a)$ be the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ relative to a point $a \in B$ (see, for example, [1–3]).

The goal of the present work is to get the upper bounds for functionals of the following form for all values of the parameter $\gamma \in (0, n]$

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

$$Y_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

where $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, is an arbitrary fixed system of points, B_0, B_{∞}, B_k is any system of mutually non-overlapping domains such that $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ for $k = \overline{1, n}$.

The following propositions hold.

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. Then, for any fixed system of points $\{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ and for any collection of mutually non-overlapping domains B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, the inequality*

$$I_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}$$

is satisfied.

Theorem 2. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. Then, for any fixed system of points $\{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ and any collection of mutually non-overlapping domains B_{∞}, B_k, $\infty \in B_{\infty} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, the inequality*

$$Y_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(Y_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

is valid.

Acknowledgements

This work was supported by the budget program "Support of the development of priority trends of scientific researches" (KPKVK 6541230).

1. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains. J. Math. Sci., 2019, 242, No. 6, 787 – 795.
2. Bakhtin A. K., Denega I. V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II. J. Math. Sci., 2020, 246, No. 5, 602 – 616.
3. Bakhtin A. K., Denega I. V. Estimation of the maximum product of inner radii of mutually disjoint domains. Ukr. Math. J., 2020, 72, 191 – 202.

Singular Lyapunov operator equation: applications to abstract Cauchy problems

B. D. Djordjević

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia

bogdan.djordjevic93@gmail.com, bogdan.djordjevic@turing.mi.sanu.ac.rs

Let A be a closed linear operator, densely defined on a separable Hilbert space H. In this talk we will derive solvability conditions for the Lyapunov operator equation $A^*X + X^*A = I$, under the premise that it is singular (without a unique bounded solution). Specially, if A is self-adjoint we obtain sufficient conditions for the solution X to be symmetric on its domain. We show that such results also hold in the bounded-operator setting and in C^*-algebras. We apply the obtained results to study abstract Cauchy problems.

1. Djordjević B. D. Singular Lyapunov operator equations: applications to C^*-algebras, Frechet derivatives and abstract Cauchy problems. Analysis and Mathematical Physics. (submitted).
2. Djordjević B. D. On a singular Sylvester equation with unbounded self-adjoint A and B. Complex Analysis and Operator Theory, 2020, 14, No. 4, 43.

On some results concerning convex sum of biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$

E. Ş. Grigoriciuc

Faculty of Mathematics and Computer Science, Department of Mathematics, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania

eduard.grigoriciuc@ubbcluj.ro

Let $\mathbb{B}^n$ be the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$ and let U be the unit disc in $\mathbb{C}$. The aim of this work is to study convex combinations of biholomorphic mappings on $\mathbb{B}^n$ (for details about holomorphy and univalence in $\mathbb{C}^n$, one may consult [2] or [3]) using an extension of the result proved by Chichra and Singh in [1]. They obtained the conditions in which a convex combination of the form $(1-\lambda)f + \lambda g$ is starlike on U, when f and g are starlike on the unit disc U and $\lambda \in [0, 1]$ (for details about this result and other results regarding to convex combinations of univalent functions, one may consult [4]). In this paper, we construct a similar result for the case of several complex variables and then we use the result to characterize convex sums of biholomorphic starlike mappings on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}^n$ (we also give examples of starlike mappings on $\mathbb{B}^n$ starting from some well-known results given in [5]).

1. Chichra P., Singh R., Convex sum of univalent functions. J. Austral. Math. Soc., 1972, 14, 503 – 507.
2. Graham I., Kohr G., Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions. — New York, Marcel Dekker Inc., 2003, 530 p.
3. Kohr G., Basic Topics in Holomorphic Functions of Several Complex Variables. — Cluj-Napoca, Cluj University Press, 2003, 195 p.
4. Merkes E. P., On the convex sum of certain univalent functions and the identity function. Rev. Colombiana Math., 1987, 21, 5 – 12.
5. Roper K., Suffridge T. J., Convexity properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc., 1999, 351, 1803 – 1833.

On generalized absolute continuity of functions

K. Ivanadze
Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
koba.ivanadze062@ens.tsu.edu.ge

In 1990 Kita and Yoneda [1] introduced new class of functions of bounded variation. T. Akhobadze [2, 3] generalized the last class for the sequences p_n and $\phi(n)$, where $p_1 \geq 1$, $p_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$ and $\phi(1) \geq 1$, $\phi(n) \uparrow \infty$, $n \to \infty$. Denote this class by $BV(p_n \uparrow \infty, \phi)$. In [4] authors defined the notation of absolute continuity with respect to $((p_n), \phi)$ and studed properties of it. We denote this class $AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ and we use the notation

$$\tau(r) = \min\{m : m \in N, \phi(m) \geq r\}.$$

Now we are going to prove the following two statements.

Theorem 1. *Let function f be 2π-periodic and absolute continious with respect to $((p_n), \phi)$ then*

$$|a_n(f)| = o(1) n^{-1/p(\tau(n))}; \quad |b_n(f)| = o(1) n^{-1/p(\tau(n))},$$

where $a_n(f)$ and $b_n(f)$ are Fourier coefficients of f.

Theorem 2. *If $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$ is not bounded then there exists a continuous function f from $BV(p_n \uparrow \infty, \phi)$ which is not $((p_n), \phi)$-absolute continuous.*

For $\phi(n) = 2^n$ Goginava [5] proved

Theorem 3. *Let $p(2n) \leq Cp(n)$ for all $n \geq 1$, where $C > 0$ is a constant and $p(n) \log p(n) = o(n)$. For all Fourier series of class $H^\omega \cap BV(p(n) \uparrow \infty, 2^n)$ to be uniformly convergent it is necessary and sufficient that*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) p([\log n]) \log p([\log n]) = 0.$$

We prove that the last theorem remains true if we consider $AC(p(n) \uparrow \infty, 2^n)$ class instead of $BV(p(n) \uparrow \infty, 2^n)$.

1. Kita H., Yoneda K. A generalization of bounded variation. Acta Math. Hungar., 1990, 56, 229–238.
2. Akhobadze T. Function of generalized Wiener classes $BV(p(n) \uparrow \infty, \phi)$ and their Fourier coefficients. Georgian Math. J., 2000, 7, 401–416.
3. Akhobadze T. A generalization of bounded variation. Acta math. Hungar., 2002, 97, 223–256.
4. Akhobadze T., Ivanadze K. On the classes of functions of generalized bounded variation. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2020, 14, 762–783.
5. Goginava U. On the divergnce of trigonometic Fourier series of the class $H^\omega \cap BV(p(n) \to \infty)$. Proceedings of A. Razmadze Mahematical Institute, 1999, 121, 63–70.

An invertibility and Fredholm criteria in a C^*-algebra acting on the Hardy space on the unit disc and the polydisc

B. B. Koca-Eskisehirli

Istanbul University, Istanbul, Turkey

basakoca@istanbul.edu.tr

In this talk, we first deal with a class of operators which are written as a linear combination of Toeplitz operators and Fourier multipliers acting on the Hardy space of the unit disc. We prove that such operators are invertible if and only if they are Fredholm with Fredholm index zero. We apply this result to obtain Fredholm criteria of similar operators acting on Hardy space of the polydisc. Our results are then applied to calculate spectra of certain composition operators on the Hardy space of the unit disc and essential spectra of a class of composition operators acting on Hardy space of the unit polydisc. This talk is based on the following papers which are joint work with U. Gul of Hacettepe University.

1. Gul U., Koca B. B. An invertibility criterion in a C*-algebra of acting on the Hardy space with applications to composition operators. Mediterranean Journal of Mathematics, 2018, 15, No. 6, 220.
2. Gul U., Koca B. B. Fredholm criteria in a C*-algebra acting on the Hardy space of the bi-disc with applications to composition operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 477, No. 1, 163–173.

On the divergence of the Fourier series with respect to uniformly bounded orthonormal systems in the spaces close to L^1

T. Kopaliani[1], **N. Samashvili**[2], **Sh. Zviadadze**[1]

[1] Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

[2] American University of the Middle East, Kuwait City, Kuwait

tengiz.kopaliani@tsu.ge, n.samashvili@gmail.com, shalva.zviadadze@tsu.ge

After that Kolmogorov [4] gave the examples of the functions in $L^1[0;1]$ with almost everywhere divergent trigonometric Fourier series, many authors try to generalize these results.

The similar problems with respect to other orthonormal systems were considered by different authors. One of them was the problem posed by Alexits (see [1, pp. 287]) and Olevskii [5] about an analogue of Kolmogorov's example of a divergent trigonometric Fourier series for general orthonormal systems that are uniformly bounded.

The answer to this question was given by Bochkarev [2]. He proved that for every given uniformly bounded orthonormal system, there exists a function in $L^1[0;1]$ that Fourier series with respect to this system diverge at every point of some set of positive measure.

The variable exponent Lebesgue spaces attract spacial attention in recent three decades. It turns out that $L^1[0;1] = \cup L^{p(\cdot)}[0;1]$ where the union is taken over all measurable $p(\cdot)$ such that a.e. $p(x) > 1$. Using this fact authors of the paper [3] provide a different point of view on the problem of a.e. divergence of trigonometric Fourier series in the subspaces of $L^1[0;1]$. Indeed any function with Fourier series that is divergent a.e. must belong to some variable exponent space $L^{p(\cdot)}[0;1]$, $1 < p(x) < \infty$ a.e.

In this talk we characterize the class of variable exponent Lebesgue spaces for which an analogue of Bochkarev's theorem is valid.

Definition 1. Let $P_{\ln}$ be a set of all functions $p : [0;1] \to [1;\infty)$ such that $p(\cdot)$ is an increasing function, $p(0) = 1$, $p(t) > 1$, $t \in (0;1]$ and

$$\liminf_{t\to 0+}(p(t)-1)\ln(e/t) < \infty.$$

Let now state the main result:

Theorem 1. *For any uniformly bounded orthonormal system Φ and for any $p(\cdot) \in P_{\ln}$, there exists a measure preserving transformation $\omega : [0;1] \to [0;1]$, such that in the corresponding $L^{p(\omega(\cdot))}[0;1]$ space, there exists a function whose Fourier series with respect to Φ diverge at every point of some set of positive measure.*

1. Alexits G. Konvergenz probleme der Orthogonalreihen. — Budapest: Verlag der Ungarischen Akad. der Wissenschaften, 1960, 307 p.
2. Bochkarev S.V. A Fourier series that diverges on a set of positive measure for an arbitrary bounded orthonormal system. Mat. Sb., 1975, 98, 436–449.
3. Edmunds D., Gogatishvili A., Kopaliani T. Construction of function spaces close to L^∞ with associate space close to L^1. J Fourier Anal Appl, 2018, 24, 1539–1553.
4. Kolmogorov A.N. Unesérie de Fourier Lebesque divergente Presque partout. Fund. Math., 1923, 4, 324–328.
5. Olevskii A.M. Complete systems of convergence. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1964, 159, 21–24.

Walker's approach to some Hardy-type integral inequalities

Atanu Manna

Faculty of Mathematics,
Indian Institute of Carpet Technology, Bhadohi, India
atanu.manna@iict.ac.in

Hardy's inequality and its several extensions play a significant role in several branches of Mathematics. In this talk, the author has taken into account of some important extensions of the Hardy's classical integral inequality due to Hardy himself, Copson, Bennett, Leindler, and Levinson. It is intended to establish a new proof of these extended inequalities via a probabilistic approach, which was initially considered by Walker [2] to prove classical Hardy's integral inequality with the best possible constant factors. The best possible constants were also calculated by using 'Kullback-Leibler' inequality. The presentation is a part of the author's latest work [1].

1. Manna A. New Hardy-type integral inequalities. Acta Sci. Math. (Szeged), 2020, 86, 3-4, 467-491.
2. Walker S. G. A probabilistic proof of Hardy's inequality. Statist. Prob. Lett., 2015, 103, 6-7.

Optimal recovery of multivariate functions from reproducing kernel Hilbert spaces

K. V. Pozharska
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
kate.shvai@gmail.com

Let $H(K)$ be a reproducing kernel Hilbert space of multivariate complex-valued functions $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^d$, with the kernel $K\colon D \times D \to \mathbb{C}$. Consider the identity operator $\mathrm{Id}\colon H(K) \to L_2(D, \varrho_D)$ and the non-increasing sequence of corresponding singular numbers $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$. Further, with $(e_n^*(\mathbf{x}))_{n=1}^{\infty} \subset H(K)$ and $(\eta_n(\mathbf{x}))_{n=1}^{\infty} = (\sigma_n^{-1} e_n^*(\mathbf{x}))_{n=1}^{\infty} \subset L_2(D, \varrho_D)$ denote the systems of left and right singular functions. Let also for $m \in \mathbb{N}$ $N_{K,\varrho_D}(m) := \sup_{\mathbf{x} \in D} \sum_{k=1}^{m-1} |\eta_k(\mathbf{x})|^2$ be the supremum over the Christoffel function.

We discuss the optimal orders of convergence q_F^{lin} and q_F^{std} of algorithms that realize upper bounds for approximation numbers $a_n(\mathrm{Id}\colon \mathrm{H(K)} \to \mathrm{F})$ and, respectively, sampling numbers $g_n(\mathrm{Id}\colon H(K) \to F)$. Let us introduce the following two assumptions:

(i) $N_{K,\varrho_D}(k) = \mathcal{O}(k^u)$;

(ii) there exist $p > 1/2$, $C_1 > 0$ such that $\sigma_j \le C_1 j^{-p}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Note that the values of u and p are optimal in the sense that $u := \inf\{u\colon\ N_{K,\varrho_D}(k) = \mathcal{O}(k^u)\}$, $p := \sup\{p\colon\ \sigma_j \le C_1 j^{-p},\ j = 1, 2, \ldots\}$.

The stronger conditions on the integral operator were earlier introduced in [1,2]. Namely, instead of the condition (i) the authors assume that

(i') there exists $C_2 > 0$ such that $\|\eta_j\|_{\ell_\infty(D)} \le C_2$, $j = 1, 2, \ldots$,

i.e., consider the special case $N_{K,\varrho_D}(k) = \mathcal{O}(k)$.

If the second assumption is true, then $q_{L_2(D,\varrho_D)}^{\mathrm{lin}} = p$. If (i') and (ii) are satisfied, then, when switching from $L_2(D, \varrho_D)$ to $\ell_\infty(D)$ norm, we loose $1/2$ in the optimal order [1]: $q_{\ell_\infty(D)}^{\mathrm{lin}} = q_{L_2(D,\varrho_D)}^{\mathrm{lin}} - 1/2 = p - 1/2$, where $p > 1/2$. Clearly, we only need the weaker assumption (i) for such a statement.

It was proved in [2], that under the assumptions (i') and (ii) the optimal order of convergence $q_{\ell_\infty(D)}^{\mathrm{std}} \in \left[\frac{2p}{2p+1}\left(p - \frac{1}{2}\right), p - \frac{1}{2}\right]$. We get [3] the following improvement:

Theorem 1. *Suppose that (i) and (ii) hold true with $2p > u$. Then $q_{\ell_\infty(D)}^{\mathrm{std}} \ge p - u/2$. In case $u = 1$ (or if (i') holds) we have $q_{\ell_\infty(D)}^{\mathrm{std}} = q_{\ell_\infty(D)}^{\mathrm{lin}} = p - 1/2$.*

Acknowledgements The work was partially financially supported by the budget program "Support of the development of priority branches of scientific research in 2020" (KPKVK 6541230).

1. Kuo F. Y., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H. Multivariate L_∞ approximation in the worst case setting over reproducing kernel Hilbert spaces. J. Approx. Theory, 2008, 152, No. 2, 135–160.
2. Kuo F. Y., Wasilkowski G. W., Woźniakowski H. On the power of standard information for multivariate approximation in the worst case setting. J. Approx. Theory, 2009, 158, No. 1, 97–125.
3. Pozharska K., Ullrich T. A note on sampling recovery of multivariate functions in the uniform norm. (arXiv:2103.11124).

A NEW CONSTRUCTION OF LUPAŞ OPERATORS AND ITS APPROXIMATION PROPERTIES

M. Qasim

Department of Mathematical Sciences, Baba Ghulam Shah Badshah University, Rajouri 185234, Jammu and Kashmir, India

bgsbuqasim@gmail.com

The Weierstrass approximation theorem is the basis of approximation theory introduced by Weierstrass [1], which states that each continuous function defined on $[a, b]$ can be approximated uniformly by some polynomial. In 1912, Bernstein [2] established a constructive proof of the Weierstrass theorem by using Korovkin's theorem [3].
On the other hand, Cárdenas et al. [4] defined the Bernstein type operators by $B_m(go\rho^{-1})o\rho$ and also presents a better degree of approximation depending on ρ. This type of approximation operators generalizes the Korovkin set from $\{e_0, e_1, e_2\}$ to $\{e_0, \rho, \rho^2\}$. In 2014, Aral et al. [5] also proposed a new modification of Szász-Mirakyan type operators to investigate approximation properties of the announced operators acting on functions defined on unbounded intervals $[0, \infty)$. Very recently, for $m \geq 1$, $z \geq 0$, and suitable functions g defined on $[0, \infty)$. Hatice et al. [6] introduced a new modification of Lupaş operators [7] using a suitable function ρ as follows :

$$L_m^{\rho}(g; z) = 2^{-m\rho(z)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m\rho(z))_j}{2^j j!} \left(go\rho^{-1}\right) \left(\frac{j}{m}\right), \tag{1}$$

where ρ satisfies following properties:
(ρ_1) ρ be a continuously differentiable function on $[0, \infty)$,
(ρ_2) $\rho(0) = 0$ and $\inf\limits_{z\in[0,\infty)} \rho^{'}(z) \geq 1$,
and $(m\rho(z))_j$ is the rising factorial defined as:

$$\begin{aligned} (m\rho(z))_0 &= 1, \\ (m\rho(z))_j &= (m\rho(z))(m\rho(z)+1)(m\rho(z)+2)\cdots(m\rho(z)+j-1), \quad j \geq 0. \end{aligned}$$

If we put $\rho(z) = z$ in (1), then reduces to the classical Lupaş operators defined in [7].
Very recently, a new construction of Szász-Mirakjan operators was given by Aral et al. [8] by using ρ and two sequences of functions α_m, β_m defined on an subinterval of $[0, \infty)$:

$$\tilde{S}_m^{\rho}(g; z) = e^{-\alpha_m(z)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta_m(z))^j}{j!} \left(go\rho^{-1}\right) \left(\frac{j}{m}\right). \tag{2}$$

Inspired by idea which is used by Aral et al. in [8], in this paper we define a new construction of Lupaş operator (1) which depend on $\alpha_m(z)$ and $\beta_m(z)$, where $\alpha_m(z)$ and $\beta_m(z)$ are sequences of functions defined on $\tilde{E} \subset [0, \infty)$. We prove that the new operators provide better weighted uniform approximation over $[0, \infty)$. In terms of weighted moduli of smoothness, we obtain degrees of approximation associated with the function ρ. Also, we prove Voronovskaya type theorem, quantitative estimates for the local approximation.

1. Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, 2, 633–639.

2. Bernstein S.N. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkov, 1912, 2, No. 13, 1-2.
3. Korovkin P.P. Linear operators and approximation theory. — Delhi: Hindustan Publishing Corporation, 1960, 222 p.
4. Cárdenas-Morales D., Garrancho P., Rasa I. Bernstein-type operators which preserve polynomials. Comput. Math. Appl., 2011, 62, No. 1, 158–163.
5. Aral A., Inoan D., Rasa I. On the generalized Szász-Mirakyan operators. Results Math., 2014, 65, No. 3-4, 441–452.
6. İlarslan H. G. .İ., Aral A., Başcanbaz-Tunca G. Generalized Lupaş operators. AIP Conference Proceedings, 2018, 1926, No. 1, 020019.
7. Lupaş A. The approximation by some positive linear operators. Proceedings of the International Dortmund meeting on Approximation Theory (M.W. Muller et al., eds.), akademie Verlag, Berlin, 1995, 201–229.
8. Aral A., Ulusoy G., Deniz E. A new construction of Szász-Mirakyan operators. Numer. Algor., 2018, 77, 313-326.

The Fourier diffraction theorem in optical tomography

M. Quellmalz
TU Berlin, Germany
quellmalz@math.tu-berlin.de

In optical diffraction tomography (ODT), the three-dimensional (3D) refractive index of an object is recovered from optical measurements taken from different angles. While in X-ray tomography the imaging waves travel on straight lines, in ODT the visible light is scattered at the object. Under Born's approximation, the Fourier diffraction theorem of ODT connects the 3D Fourier transform of the searched-for refractive index with the 2D Fourier transform of the measurements. From a mathematical perspective it is important to consider the describing diffraction equations and backpropagation formulae in a rigorous distributional setting.

In the present mathematical studies, we assume that the motion has been determined already beforehand, but can be rather irregular. This makes the derivation of reconstruction formulae as well as the numerical solution a challenging task.

1. Kirisits C., Quellmalz M., Ritsch-Marte M., Scherzer O., Setterqvist E., Steidl G. Fourier reconstruction for diffraction tomography of an object rotated into arbitrary orientations. (arXiv:2104.07990).

Asymptotic estimates for ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus

R. R. Salimov, B.A. Klishchuk

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine

ruslan.salimov1@gmail.com, kban1988@gmail.com

Let Γ be a family of curves γ in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. A Borel measurable function $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ is called *admissible* for Γ, (abbr. $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$), if

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \ \geqslant\ 1$$

for any curve $\gamma \in \Gamma$. Let $p \in (1, \infty)$. The quantity

$$M_p(\Gamma) \ =\ \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)$$

is called *p–modulus* of the family Γ.

For arbitrary sets E, F and G of $\mathbb{R}^n$ we denote by $\Delta(E, F, G)$ a set of all continuous curves $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ that connect E and F in G, i.e., such that $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in G$ for $a < t < b$.

Let D be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$ and $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Set

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1,\, 2\,.$$

Let a function $Q : D \to [0, \infty]$ be Lebesgue measurable. We say that a homeomorphism $f : D \to \mathbb{R}^n$ is ring Q-homeomorphism with respect to p-modulus at $x_0 \in D$ if the relation

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant\ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

holds for any ring $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)\,$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ and for any measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

Denote by ω_{n-1} the area of the unit sphere $\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=1\}$ in $\mathbb{R}^n$ and by $q_{x_0}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}\,r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}Q(x)\,d\mathcal{A}$ the integral mean over the sphere $S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x-x_0|=r\}$, here $d\mathcal{A}$ is the element of the surface area. Let $L(x_0,f,R)=\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant R}|f(x)-f(x_0)|$.

Theorem 1. *Suppose that $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ is a ring Q-homeomorphism with respect to p-modulus at a point x_0 with $p>n$ where x_0 is some point in $\mathbb{R}^n$ and for some numbers $r_0>0$, $K>0$ the condition*

$$q_{x_0}(t)\leqslant K\,t^{\alpha}$$

holds for a.e. $t\in[r_0,+\infty)$. If $\alpha\in[0,p-n)$ then

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}}\geqslant K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,.$$

If $\alpha=p-n$ then

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}}\geqslant K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,.$$

Acknowledgements

This work was supported by the budget program "Support of the development of priority trends of scientific researches" (KPKVK 6541230).

Approximation of the periodical functions by trigonometric polynomials which preserves the sign

V. Voloshyna[1,2]
[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,Ukraine
[2] University of Toulon, France
victoriia-voloshyna@etud.univ-tln.fr

Let $s \in \mathbb{N}$ and $\mathbb{Y}_s := \{Y_s\} = \{\{y_i\}_{i=1}^{2s}\}$, $y_i \in \mathbb{R}$, $y_{2s} < \cdots < y_1 < y_{2s} + 2\pi =: y_0$.
Consider

$$\Delta^{(0)}(Y_s) = \{f(t) : f(t)\prod_{i=1}^{2s}(t - y_i) \geq 0, \quad t \in [y_{2s}, y_0].\}, \tag{1}$$

where $f \in C(\mathbb{R})$ is a 2π-periodic function.

Denote by $C^{(r)}, r \in \mathbb{N}$, the space of 2π - periodic functions $f \in C^{(r)}(\mathbb{R})$. $W^r, r \in \mathbb{N}$ stands for the Sobolev space of 2π-periodic functions $f \in AC^{(r-1)}(\mathbb{R})$, such that

$$\|f^{(r)}\| < +\infty, \|g\| := \operatorname{esssup}_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|.$$

Let $\mathbb{T}_n$ be the space of trigonometric polynomials of degree $\leq n$ (of order $2n+1$).

$$\omega_k(f,t) = \sup_{h\in[0,t]} \|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(\cdot + ih)\|, \quad t \geq 0,$$

is the modulus of continuity of a function f of order $k \in \mathbb{N}$.

The case of the approximation of function by a trigonometrical polynomial with the same intervals of monotonicity was researched in [3], for a continuous function f; in [1], for $r \geq 2$; in [2], a counterexample given for $k \geq 3$.

Our result for the following conditions is presented in the theorem 1.

Theorem 1. *For any natural k and n, $n \geq N(Y,k) = const$, and any funcion $f \in C^{(1)} \bigcap \Delta^{(0)}(Y_s)$, there exists a polynomial $R_n \in \mathbb{T}_n \bigcap \Delta^{(0)}(Y_s)$ such that*

$$||f - R_n|| \leq \frac{c(k,s)}{n}\omega_k(f', 1/n), f \in C^{(1)}. \tag{2}$$

1. Dzyubenko H. A. Comonotone approximation of twice differentiable periodic functions. Ukr. Math. J., 2009, 61, No. 4, 519–540.
2. Dzyubenko G. A. Contrexample in comonotone approximation of periodic functions [in Ukrainian]. Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine, 2008, 5, No. 1, 113–123.
3. Dzyubenko H. A., Pleshakov M. G. Comonotone approximation of periodic functions. Matematicheskie Zametki, 2008, 83, No. 2, 199–209.

Problem on extremal decomposition of the complex plane with free poles

L. V. Vyhivska

Institute of mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

liudmylavyhivska@ukr.net

Let $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be the Riemann sphere, and $r(B, a)$ be the inner radius of the domain $B \in \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$.

Consider the following problem which was formulated in 1994 [1].

Problem 1. Consider the product

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

where B_0, B_1,...,B_n $(n \geq 2)$ are pairwise non-overlapping domains in $\overline{\mathbb{C}}$ and $a_0 = 0$ and $|a_k| = 1$ for $k = \overline{1, n}$, and $0 < \gamma \leqslant n$. Show that it attains its maximum at a configuration of domains B_k and points a_k possessing rotational n-symmetry.

This problem has a solution only if $\gamma \leqslant n$ as soon as $\gamma = n + \epsilon, \epsilon > 0$, the problem has no solution. Currently it still unsolved in general, only partial results are known [2].

The following theorem holds [3].

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $n \geqslant 2$. Then for any $\beta \in (0; \frac{1}{2}]$ there exists $n_0(\beta)$ such that for all $n \geqslant n_0(\beta)$ and for all $\gamma \in (1, n^{\beta}]$ and for any different points of a unit circle and for any different system of non-overlapping domains B_k, such that $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ for $k = \overline{1, n}$, and $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, the following inequality holds*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{1}$$

Equality is attained if a_k and B_k for $k = \overline{0, n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

1. Dubinin V. N. Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. Russ. Math. Surv., 1994, 49, No. 1, 1 – 79.
2. Bakthin A. K., Bakhtina G. P., Zelinskii Yu. B. Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. In Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2008, 308 p.
3. Bakthin A. K., Vyhivska L. V. Problem on extremal decomposition of the complex plane with free poles. Journal of Mathematical Sciences, 2020, 248, No. 2, 145 – 165.

Параболічна область збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

І. Б. Біланик[1,2]

[1]Тернопільський національний педагогічний університет імені В. Гнатюка, Тернопіль, Україна

[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

i.bilanyk@ukr.net

Обєктом дослідження є двовимірні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $b_{i(k)},\ a_{i(k)} \in \mathbb{C}\,, i(k) \in \mathcal{I}, \mathcal{I} = \{i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\ : 1 \leq i_k \leq i_{k-1} \leq ... \leq i_0;\ k \geq 1;\ i_0 = 2\}$.

Теорема 1. *Нехай елементи двовимірного ГЛД спеціального вигляду (1) задовольняють умови*

$$\left|a_{1[n]}\right| - \Re\left(a_{1[n]}\right) \leq 2p_{n-1}\left(\Re\left(b_{1[n]}\right) - p_n\right), \textit{ для довільних } n \geq 1,$$

$$\left|a_{2[k],1[n]}\right| - \Re\left(a_{2[k],1[n]}\right) \leq 2p_{n-1}\left(\Re\left(b_{2[k],1[n]}\right) - p_n\right), \textit{ для довільних } n \geq 1 \textit{ і } k \geq 1,$$

$$\left|a_{2[n]}\right| - \Re\left(a_{2[n]}\right) \leq 2p_{n-1}\left(\Re\left(b_{2[n]}\right) - p_n\right), \textit{ для довільних } n \geq 1,$$

$$\Re\left(b_{1[n]}\right) > p_n,\ \Re\left(b_{2[k],1[n]}\right) > p_n,\ \Re\left(b_{2[n]}\right) > p_n,\ \textit{ для довільних } n \geq 1 \textit{ і } k \geq 1,$$

де $s[r] = \underbrace{s, s, \ldots, s}_{r}$, $s = 1, 2;$ $r = k$, *або* $r = n$; p_n *– деякі додатні сталі такі, що члени послідовностей*

$$\left\{\frac{a_{1[n]}}{p_n p_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\frac{a_{2[k],1[n]}}{p_n p_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{a_{2[n]}}{p_n p_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

належать одиничному кругу з центром в початку координат. Тоді ГЛД (1) збігається.

Теорема 1 є двовимірним аналогом теореми, встановленої Джонсом і Троном у роботі [2]. Доведення Теореми 1 ґрунтується на використанні цієї теореми, а також елементів теорії стійкості неперервних дробів до збурень та властивостей неперервних дробів, елементи яких беруться із параболічних областей.

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби.– К. : Наук. Думка, 1986, 176 с.
2. Jones W., Thron W. Convergence of Continued Fractions. Canadian Journal of Mathematics, 1968, 20, 1037–1055.

Наближення функцій в просторах Бергмана

М. В. Гаєвський, І. Г. Ключник

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

mgaevskij@gmail.com

Нехай $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\}$, $Hol(D)$ — множина аналітичних в D функцій, $A \subset Hol(D)$ — простір Бергмана аналітичних в D функцій з нормою

$$\|f\| = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} |f(x+iy)| dxdy < \infty.$$

Нехай далі $f \in Hol(D)$ та $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D$ — її розклад в ряд Тейлора-Маклорена, якщо для послідовності комплексних чисел $\psi = \psi(k), k \in \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D$ є рядом Тейлора деякої функції з класу A, то цю функцію будемо позначати f^{ψ} і назвемо її ψ-похідною функції f. Позначимо через A^{ψ} клас функцій з A, у яких похідна $f^{\psi} \in A$ та $\|f^{\psi}\| \leq 1$ [1].

Будемо говорити, що послідовність ψ задовольняє умови типу Сідона-Теляковського $(S - T^*)$, якщо

1) $\lim\limits_{k \to \infty} \psi(k) = 0$;

2) існує послідовність A_k така, що $\lim\limits_{k \to \infty} A_k = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)|\triangle A_k| < \infty$, де $|\triangle \psi(k)| \leq A_k$.

Теорема 1. *Якщо послідовності комплексних чисел* $\{(k+1)\psi(k)\}$, *та* $\{\psi(k)\}, k \in \mathbb{N}$ *задовольняють умови* $S - T^*$ *та* $\sum_{k=1}^{\infty} |\psi(k)| < \infty$, *то*

$$\sup_{f \in A^{\psi}} \|f(z) - S_n(f,z)\|_{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(k+n)|}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n+1)|\triangle A_k|,$$

де $S_n(f,z)$ *— частинні суми ряду Тейлора,* $|\triangle \psi(k)| \leq A_k$ *та* $O(1)$ *— величина рівномірно обмежена по* n *та* f.

1. Савчук В. В. Лінійні методи наближення деяких класів голоморфних функцій із простору Бергмана. Український математичний журнал, 2008, 6, №. 60, 783–795,

Апроксимаційні характеристики класів типу Нікольського-Бєсова періодичних функцій багатьох змінних

М. В. Гембарський, О. В. Федуник-Яремчук, С. Б. Гембарська

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

hembarskyi@gmail.com, fedunyk.o.v@gmail.com, gembarskaya72@gmail.com

Досліджуються класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних [1], де $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, ω – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, що задовольняє умови (S^{α}) та (S_l), які називаються умовами Барі-Стєчкіна [2]. При певному виборі функції Ω класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають із аналогами відомих класів Нікольського-Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ [3].

Нехай $L_\infty(\pi_d), \pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0; 2\pi)$, – простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі стандартною нормою, $\{u_i\}_{i=1}^{M}$ – ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $\sum\limits_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i$ – ортогональна проекція функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^{M}$.

Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$, норма в якому є більш сильною, ніж L_∞-норма. Для функціональних класів $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B_{\infty,1}$ ці величини визначаються наступним чином

$$d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{\infty,1}) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^{M}} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \Big\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i(\cdot)\Big\|_{B_{\infty,1}}.$$

Наведемо один із одержаних результатів.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 1$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де ω задовольняє умову (S^{α}) із $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується співвідношення*

$$d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

1. Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1997, 219, 356 – 377.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, 5, 483 – 522.
3. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1989, 143 – 161.

Сингулярно несиметрично скінченого рангу збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$ самоспряженого оператора

М. Є. Дудкін, О.Ю. Дюженкова

Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна

dudkin@imath.kiev.ua, oduzen@ukr.net

Пропонується узагальнення результатів робіт [1,2] та на випадок несиметричних класу $\mathcal{H}_{-1}$ збурень скінченого рангу. Тобто, розглядається формальний вираз вигляду

$$\tilde{A} = A + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j,$$

де A – незбурений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $0 < |\alpha_i| < \infty$ і ω_j, δ_j, $j = 1, 2, ..., n < \infty$ – вектори із негативного простору $\mathcal{H}_{-1}$, побудованому за A. Дія оператора A надалі розуміється як продовженого на $\mathcal{H}_{-1}$ за неперервністю.

Означення 1. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}_{-1}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}_{-1}$, $n < \infty$, таких що $\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H} = \{0\}$, де $\Omega := \text{span}\{\omega_j\}_{j=1}^n$, $\Delta := \text{span}\{\delta_j\}_{j=1}^n$, оператор $\tilde{A}$ називається сингулярно рангу n збуреним $\mathcal{H}_{-1}$-класу відносно A (і позначається $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$), якщо при деякому фіксованому $z \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \left\{ \vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i b_{i,j}(z) \langle \phi, \omega_i \rangle (A - z)^{-1} \delta_j \mid \phi \in \mathfrak{D}(A) \right\},$$

де $b_{i,j}(z)$ – елементи матриці оберненої до матриці $G(z) = I + \left(\alpha_i \langle \delta_j, (A - \bar{z})^{-1} \omega_i \rangle\right)_{i,j=1}^n$, I – одинична матриця, за умови $\det\, G(z) \neq 0$; та

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(\tilde{A}) = &\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dot{+} \text{span}\{(A - z)^{-1}\delta_j\}_{j=1}^n,\\ &\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \left\{ \phi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A - z)\phi, (A - \bar{z})^{-1}\omega_j) = 0,\ j = 1, 2, ..., n \right\},\end{aligned}$$

за умови $\det G(z) = 0$; і дія на векторах з $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ задається правилом $(\tilde{A} - z)\vartheta = (A - z)\phi$.

Теорема 1. *Резольвенти R_z, $z \in \rho(A)$ незбуреного самоспряженого оператора A і – $\tilde{R}_z$, $z \in \rho(\tilde{A})$ збуреного $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$ в $\mathcal{H}$ пов'язані формулою типу М.Крейна:*

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z), \quad z, \xi \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$$

із векторно-значними функціями

$$n_j(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1} n_j(\xi),\ m_j(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1} m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n,$$

де $n_i(z) = R_z \delta_i$, $m_j(z) = R_z \omega_j$, і матрично-значною функцією $G(z)^{-1} = \{b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^n$, такою що

$$G(z) - G(\xi) = (z - \xi)\Gamma(n_i(\xi), \bar{\alpha}_j m_j(\bar{z})),$$

де $\Gamma(\ \cdot\ \cdot\ )$ – матриця Грама відповідних векторів.

1. Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators. — Cambridge: Univ. Press, 2000, 265 p.
2. Dudkin M. E., Vdovenko T. I. Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations. Mat. Stud., 2017, 48, No. 2, 156 – 164.

Оцінка похибки відновлення неперервних на квадраті функцій за неточно заданою лінійною інформацією

О. А. Пожарський
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
pozharskyio@gmail.com

Розв'язується задача відновлення неперервних функцій $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ двох змінних із класів $W^{\psi}_{2,p}$, $1 \le p < \infty$, що задаються у термінах узагальненої гладкості ψ за їхніми коефіцієнтами Фур'є $y_{i,j}$, $i,j = 1,2,\dots$, відносно деякої ортонормованої системи, які задані з похибкою $\delta\xi_{i,j}$, де $\delta \in (0,1)$, а $\|\xi\|_{l_p} = \left\|(\xi_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}\right\|_{l_p} \le 1$. При цьому використано λ-метод підсумовування рядів, що задається трикутними числовими матрицями із певними обмеженнями щодо їхніх елементів. Похибку відновлення функцій оцінюємо в метриці простору $C([0,1]^2)$ неперервних на $[0,1]^2$ функцій.

Дослідження доповнюють результати, отримані у роботі [1], де розв'язано аналогічну задачу відновлення на класах функцій однієї змінної.

1. Pozharska K. V., Pozharskyi A. A. Recovery of continuous functions from their Fourier coeffcients known with error. Researches in Mathematics, 2020, 28, No. 2, 24 – 34.

Інверсор цифр Q_2^*-зображення чисел

С. П. Ратушняк
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
ratush404@gmail.com

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт двійкової системи числення, $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей нулів та одиниць, $\|q_{ik}\|$ — нескінченна стохастична матриця з двома рядками і нескінченною кількістю стовпців, яка має властивості:

$$q_{ik} > 0, \ \ q_{0k} + q_{1k} = 1, \ \prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}\} = 0.$$

Покладемо $\beta_{0k} \equiv 0$, $\beta_{1k} \equiv q_{0k}$, $\beta_{2k} \equiv 1$ для будь-якого $k \in N$.

Теорема 1. *[4] Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ нулів та одиниць така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}. \tag{1}$$

*Розклад числа $x \in [0; 1]$ в ряд (1) називається його Q_2^*-*представленням*, а скорочений запис $\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$ — Q_2^*-*зображенням*. При цьому $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається k-*ою *цифрою* цього зображення.*

Означення 1. Інверсором цифр Q_2^*-зображення чисел відрізка $[0; 1]$ називається функція $y = I^*(x)$, означена рівністю

$$y = I^*(x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_2^*}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]...[1-\alpha_n]...}. \tag{2}$$

Означення інверсора I^* рівністю (2) є коректним, оскільки виконується рівність $I^*(\Delta^{Q_2^*}_{c_1...c_{n-1}0(1)}) = I^*(\Delta^{Q_2^*}_{c_1...c_{n-1}1(0)})$ для будь-якого $n \in N$.

Якщо $q_{0k} = q_0$ для будь-якого $k \in N$ тобто Q_2^* зображення є Q_2-зображенням чисел [1], то I^* є сингулярною строго спадною функцією — інверсором Q_2-цифр зображення чисел [3], а у випадку, коли $q_{0k} = \frac{1}{2}$ для $k \in N$ (Q_2^*-зображення є класичним двійковим зображенням), то $I^*(x) = 1 - x$.

Теорема 2. *Функція I^* є неперервною, строго спадною, причому $I^*(0) = 1$, $I^*(1) = 0$, якщо $q_{0k} = q_0$; для будь-якого $k \in N$, то графік Γ функції є самоафінною множиною простору R^2, самоафінна розмірність якої рівна $\frac{-2}{\log_2(q_0q_1)}$; якщо для майже всіх чисел $x = \Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_n(x)...}$ відрізка $[0; 1]$ послідовність $\frac{q_{1-\alpha_n(x)n}}{q_{\alpha_n(x)}}$ є або розбіжною, або має границю, відмінну від 1, то функція $I^*(x)$ є сингулярною, тобто неперервною функцією, похідна якої рівна 0 майже скрізь (у розумінні міри Лебега).*

1. Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами. Асимптотические методы в исследовании стохаст. моделей, К.: ИМ АН УССР, 1987, 92–102.
2. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. Inversor of digits of Q_2^*-representative. Mat. Stud., 2021, 55, 37–43.
3. Працьовитий М. В., Скрипник С. В. Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1, 2013, 15, 134–143.
4. Торбин Г.М., Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками. Случайные эволюции: теоретические и приклад. задачи, К.: ИМ АНУ, 1992, 95-104.

Про локальну поведінку нелінійної системи Коші-Рімана-Бельтрамі

Р. Р. Салімов, М. В. Стефанчук

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду $f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z$.

Нехай $\sigma\colon D \to \mathbb{C}$ — вимірна функція і $m > 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння: $f_r = \sigma(re^{i\theta})\,|f_\theta|^m\, f_\theta$. Дане рівняння можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{1}$$

Відображення $f\colon G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с.

Означення 1. Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння (1) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f\colon G \to \mathbb{C}$, який м.с. в області G задовольняє рівняння (1).

Будемо вважати, що $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$, $\quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\quad \mathbb{A}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{z \in \mathbb{C} :\ \varepsilon_1 < |z| < \varepsilon_2\}$.

Теорема 1. *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1) класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деяких чисел $c_0 > 0$, $\kappa \in \left[0, \frac{m+2}{m+1}\right)$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2m+3}{m+1}}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant c_0 \left(\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\kappa}$$

для будь-яких $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, то

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2-\kappa(m+1)}{m}} \leqslant \nu_0 c_0^{\frac{m+1}{m}} < \infty\,,$$

де ν_0 — додатна стала, яка залежить тільки від m і κ.

Теорема 2. *Нехай $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (1) класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ з нормуванням $f(0) = 0$. Якщо для деякого $r_0 \in (0,1)$ виконується умова*

$$I_0 = \int\limits_{B_{r_0}} \frac{dxdy}{|z|^{\frac{2(m+1)}{m}}\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{2}{m}}} < \infty,$$

то

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)| \left(\ln\frac{1}{|z|}\right)^{\frac{m+2}{2m}} \leqslant \nu_0 \sqrt{I_0},$$

де ν_0 — додатня стала, яка залежить тільки від m.

1. Салімов Р. Р., Стефанчук М. В. Логарифмічна асимптотика нелінійного рівняння Коші-Рімана-Бельтрамі. Укр. мат. журн., 2021, 73, № 3, 395 – 407.

Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці

В. В. Шкапа, І. В. Замрій, Г. М. Власик

Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна

vshkapa@ukr.net, irinafraktal@gmail.com, annawlasik@gmail.com

Розглядається наближення періодичних функцій багатьох змінних із класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у просторі L_∞. Дані класи для одновимірного випадку були запропоновані О. І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 25]). Зазначимо, що вони є узагальненням добре відомих класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Через D будемо позначати множину послідовностей ψ, які задовольняють наступні умови:

1) ψ — додатні та незростаючі;

2) $\exists C > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N} \quad \frac{\psi(l)}{\psi(2l)} \leq C$.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, – d-вимірний простір, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$. Через $L_\infty(\pi_d)$ позначимо простір 2π–періодичних за кожною змінною функцій f, зі стандартною нормою.

Визначимо апроксимативну характеристику, про яку йтиме мова у доповіді.

Для $f \in L_\infty$ покладемо

$$S_{\theta_M}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)},$$

де $\widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right)$ – коефіцієнти Фур'є функції f, $\theta_M = \left\{\boldsymbol{k}^j : \boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j), \ \boldsymbol{k}^j \in \mathbb{Z}^d, \ j = \overline{1, M}\right\}$, і позначимо

$$e_M^{\perp}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_\infty = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \inf_{\theta_M} \|f - S_{\theta_M}(f)\|_\infty. \tag{1}$$

Величину (1) називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класів функцій $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у просторі L_∞.

Має місце наступне твердження:

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j(|k_j|)\,|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для будь–яких натуральних M і n, що задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі оцінки*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{p}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \ll e_M^{\perp}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_\infty \ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)},$$

де

$$\Phi(n) = \min_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}), \qquad \Psi(n) = \max_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}).$$

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987, 286 с.

Applied and Computational Mathematics

Прикладна та обчислювальна математика

SUPG-STABILIZED FINITE ELEMENT FORMULATION OF SHALLOW-WATER EQUATIONS

S. Cengizci[1,2], **Ö. Uğur**[1], **T. E. Tezduyar**[3,4]

[1] Institute of Applied Mathematics, Middle East Technical University, Ankara, Turkey

[2] Department of Computer Programming, Antalya Bilim University, Antalya, Turkey

[3] Mechanical Engineering, Rice University, Houston, Texas, USA

[4] Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, Japan

suleyman.cengizci@antalya.edu.tr, ougur@metu.edu.tr, tezduyar@gmail.com

The shallow-water equations are used in the mathematical modeling of many real-world phenomena such as flows in open channels, transport of chemical species, floods (including those due to tsunami waves, tidal flows, and storm surges), dam-breaks, turbulence in the atmosphere and oceans. Since such problems generally have complex flow domains, finite element methods are well suited for their numerical simulations [1–3].

In this study, the 2D shallow-water equations used in [4] are adopted, and a semi-discrete streamline-upwind/Petrov–Galerkin formulation is given. The stabilized formulation is further supplemented with the YZβ shock-capturing reported in [5–7]. The implicit Euler method is employed for temporal discretization. Two test problems from [4] are used to evaluate the performance of the proposed formulation.

1. Takase S., Kashiyama K., Tanaka S., Tezduyar T. E. Space–time SUPG finite element computation of shallow-water flows with moving shorelines. Comput. Mech., 2011, 48, No. 3, 293–306.
2. Kounadis G., Dougalis V. A. Galerkin finite element methods for the shallow water equations over variable bottom. J. Comput. Appl. Math., 2020, 373, 112315.
3. Kashiyama K., Ohba Y., Takagi T., Behr M., Tezduyar T. Parallel finite element method utilizing the mode splitting and sigma coordinate for shallow water flows. Comput. Mech., 1999, 23, 144–150.
4. Takase S., Kashiyama K., Tanaka S., Tezduyar T. E. Space—time SUPG formulation of the shallow-water equations. Int. J. Numer. Methods Fluids, 2020, 64, 1379–1394.
5. Tezduyar T. E., Senga M. SUPG finite element computation of inviscid supersonic flows with YZβ shock-capturing. Comput. Fluids, 2020, 36, No. 1, 147–159.
6. Tezduyar T. E., Senga M., Vicker D. Computation of inviscid supersonic flows around cylinders and spheres with the SUPG formulation and YZβ shock-capturing. Comput. Mech., 2006, 38, 469–481.
7. Tezduyar T. E., Senga M. Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 2020, 195, 1621–1632.

Motion of a rigid body under the action of a small control moments

T. A. Kozachenko, K. A. Kozachenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine

kushpil.t.a@gmail.com

The problem of the rotation of a rigid body about a fixed point has long attracted the attention of researchers. In the theoretical aspect, this problem has interested specialists in the field of theoretical mechanics since the 18th century. Research in this area continues, related to the analysis of the rotating motion of a rigid body in celestial mechanics, the motion of a rotating projectile, and gyroscopy. In works [1—3], perturbed fast motions of a rigid body close to regular precession in the Lagrange case are considered.

This article investigates the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of a constant restoring moment and a disturbing moment slowly varying in time.

It is proposed to investigate the behavior of solutions of the system of equations of motion of a body under the assumptions that the direction of the angular velocity of the body is close to the axis of dynamic symmetry, the angular velocity is sufficiently high; the two projections of the vector of the perturbing moment onto the principal axes of inertia of the body are small as compared to the restoring moment, and the third projection is of the same order as the restoring moment. To convert the system of equations to a form convenient for research, the procedure described in [1, 3] is used. According to this procedure, the original system is transformed into a system of nonlinear differential equations with two phases. It is very difficult to obtain a solution to this system in an analytical form. In works [1, 3], using the method of averaging for the system of equations, solutions were obtained in the first and second approximations. The authors of the article solved the system of nonlinear differential equations numerically using the Maple software package.

A mechanical model is considered that corresponds to the case of suppression of the equatorial component of the vector of angular velocity by means of a limited moment of forces, with certain parameters and initial conditions. Graphs of changes in precession and nutation angles, as well as projections of the vector of angular velocity, obtained as a result of numerical integration, are plotted. The nutation angle value ranges from 0.51 to 0.52 radians, the precession angle slowly increases. Two projections of the vector of angular velocity onto the principal axes of inertia of the body oscillate and slowly damping. The correctness of the calculation was controlled by the fact that the values obtained as a result of the numerical integration of the system for the axial component of the vector of angular velocity coincide with the exact solution.

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. — Cham: Springer, 2017, 241 p.
2. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko L. D. Evolution of rotations of rigid body under the action of restoring and control moments. Journal of Computer and Systems International, 2002, 41, No. 5, 868 – 874.
3. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko L. D. Rotations of a rigid body under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Mechanics of Solids, 2003, 38, No. 2, 1 – 7.

An algorithm for contracting Latin cubes

Fedir Sokhatsky, Ruslana Matviychuk, Maxim Dmytruk
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
fmsokha@ukr.net, matviichuk.r@donnu.edu.ua, dmytruk.m@donnu.edu.ua

Introduction. Latin squares, cubes and hypercubes are effectively used in such fields of science as coding, cryptography, statistics, experimental design theory etc. The number of scientific works devoted to their study is growing. Prolongation and contraction are the methods to obtain one Latin cube from the other. The authors do not know works devoted to prolongation and contraction of Latin cubes, except [1].

A set of cells indexed by elements from $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \overline{m}\}$, where $\overline{m} := \{0, 1, ..., m-1\}$, is called a *cube*. The sets

$$L_{1,a,b} := \{(x, a, b) \mid x \in \overline{m}\}, \quad L_{2,a,b} := \{(a, x, b) \mid x \in \overline{m}\}, \quad L_{3,a,b} := \{(a, b, x) \mid x \in \overline{m}\}$$

are called a *string*, a *row* and a *column* respectively. The sets of the cells

$$S_{1,a} := \{(a, y, z) \mid y, z \in \overline{m}\}, \quad S_{2,a} := \{(x, a, z) \mid x, z \in \overline{m}\}, \quad S_{3,a} := \{(x, y, a) \mid x, y \in \overline{m}\}$$

are respectively called a *string layer*, a *row layer* and a *column layer* of the cube. A cell (a, b, c) containing an element d is called a *filled one* and is denoted by (a, b, c, d). A set of filled cells is said to be *complete* if each element in these cells occurs exactly once. A cube is called *Latin* if each row, column, and string are complete.

Description of the algorithm for contracting Latin cubes. The contraction of a Latin cube of order m is carried out in the following way: a string layer, a row layer and a column layer are removed and all occurrences of some element are replaced by other elements to obtain a Latin cube of order $m-1$.

Choose an arbitrary cell (a, b, c, d). Let d appear in a cell (x, y, z) which is not in the layers $S_{1,a}$, $S_{2,b}$, $S_{3,c}$. Replace the element d in the cell (x, y, z, d) with an element being in the three cells. These cells are the intersection of the string, row and column containing the cell (x, y, z, d) and the layers $S_{1,a}$, $S_{2,b}$, $S_{3,c}$ respectively. The replacement does not take place, if at least two elements in these three cells are different. If all replacements have taken place, then the layers $S_{1,a}$, $S_{2,b}$, $S_{3,c}$ are removed. As a result, the Latin cube of order $m-1$ has been obtained.

If the element d has not been replaced in at least one cell, then the selected cell is not removable and another cell should be selected. If all the cells are not removable, then the Latin cube is *not contractible* by this algorithm, though it can be contracted in another way.

1. Sokhatsky F.M., Kirka D.V. Prolongation of ternary quasigroups [in Ukrainian]. Science online: International electronic journal, 2020, No. 10.

Stochastic hepatitis C model with an isolation stage

Vuk Vujović
University of Niš, Faculty of Science and Mathematics
Višegradska 33, 18000 Niš, Serbia
vukpharm@gmail.com

In this paper deterministic Hepatitis C model with an isolation stage is enriched with random perturbation, that briefly describes how the environmental factors lead an individual to become infected with HCV virus. Obtained stochastic model better describes variability and uncertainty which may manifest through the contact between persons in the population. Firstly, existence, positivity and boundedness of the solution of the aforementioned stochastic system are studied. Secondly, stability features of the stochastic Hepatitis C model are investigated, especially the extinction and the persistence of the disease are considered. The conclusion is that quarantine of infected individuals positively affects until the vaccine be discovered. Finally, adequate numerical simulation is given, in order do demonstrate achieved theoretical results.

Distances to and the sparsity of lattice points in knapsack polytopes

Aled Williams
Cardiff University, Cardiff, United Kingdom
williamsae13@cardiff.ac.uk

During this talk we show a surprising relation holds between two well-established areas of research, namely proximity and sparsity of solutions to integer programs. The proximity-type results provide estimates for the distance between optimal vertex solutions to linear programs and feasible integer points. The sparsity-type results, in their turn, provide bounds on the size of support (i.e. the number of nonzero components) for feasible integer points and solutions to integer programs.

Throughout the talk we focus mainly on the *knapsack scenario*. In this context, our results can be viewed as a transference result which allows strengthening the best known distance bound if integer points in the knapsack polytope are not sparse and, vice versa, strengthening the best known sparsity bound if feasible integer points are sufficiently far from a vertex of the knapsack polytope. It should be noted that we have generalised the transference result to general integer programs and this more general result will be additionally discussed if time allows. This is joint work with Iskander Aliev, Marcel Celaya and Martin Henk.

1. Aliev I., Averkov G., De Loera J. A., Oertel T. Sparse representation of vectors in lattices and semigroups. Mathematical Programming, 2021.
2. Aliev I., Celaya M., Henk M., Williams A. Distance-sparsity transference for vertices of corner polyhedra. SIAM Journal on Optimization, 2021, 31, No. 1, 200–216.
3. Aliev I., Henk M., Oertel T. Distances to lattice points in knapsack polyhedra. Mathematical Programming, 2019.
4. Eisenbrand F., Weismantel R. Proximity results and faster algorithms for Integer Programming using the Steinitz Lemma. ACM Transactions on Algorithms (TALG), 2019, 16, No. 1, 1–14.

Асимптотична стійкість моделі пружної балки з приєднаною масою

Ю. І. Калоша, О.Л. Зуєв

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, Слов'янськ, Україна

julykucher@gmail.com, alexander.zuyev@gmail.com

У доповіді розглянуто абстрактне диференціальне рівняння $\dot{\xi}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\xi(t)$ у гільбертовому просторі $X = \overset{\circ}{H}{}^2(0,l) \times L^2(0,l) \times \mathbb{C}^2$. Права частина рівняння містить диференціальний оператор четвертого порядку

$$\tilde{A} : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \tilde{A}\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\rho(x)}\left(E(x)I(x)u''(x)\right)'' + \frac{1}{\rho(x)}\sum\limits_{j=1}^{k}\psi_j''(x)M_j \\ q \\ \frac{1}{m}(L - \varkappa p + F) \end{pmatrix},$$

з областю визначення

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \left\{ \xi \in X : \begin{array}{cc} u \in H^4(0,l_0) \cap H^4(l_0,l), & v \in \overset{\circ}{H}{}^2(0,l), \\ u''(0) = u''(l) = 0, & p = u(l_0), \\ u''|_{x=l_0-0} = u''|_{x=l_0+0}, & q = v(l_0) \end{array} \right\} \subset X.$$

Представлене рівняння описує коливання механічної системи, яка складається з шарнірно опертої пружної балки довжини l з розподіленими керуваннями і приєднаної в точці $l_0 \in (0,l)$ маси. Тут $L = E(x)I(x)\left(u'''|_{x=l_0-0} - u'''|_{x=l_0+0}\right)$, функції $\psi_j(x)$ характеризують розташування розподілених керуючих механізмів. Позначимо через A оператор $\tilde{A}$ при нульовому керуванні $M_1 = \cdots = M_k = F = 0$. У статті [1] наведено опис розглянутої математичної моделі та досліджено асимптотичний розподіл власних значень оператора A.

Встановлено, що замкнений щільно визначений оператор $\tilde{A}$ є m-дисипативним, тож згідно з теоремою Люмера–Філіпса він є інфінітезимальним генератором C_0-напівгрупи операторів в X. Резольвента оператора $\tilde{A}$ є компактним відображенням $X \to X$ при $\lambda > 0$. Оператор A має кососиметричний обернений, який є компактним відображенням $A^{-1} : X \to X$. Згідно з теоремою Гільберта–Шмідта власні вектори оператора A формують базис простору X. Система функцій $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{\infty}$, де λ_j — власні значення оператора A, є мінімальною в $L^2(0,\tau)$. Основним результатом доповіді є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $\xi_i = (u_i, v_i, p_i, q_i)^T$, $i \in \mathbb{N}$ – власні вектори оператора A, та для кожного $i \in \mathbb{N}$ або $v_i(l_0) \neq 0$, або існує таке $j \in 1,\dots,k$, що $\int\limits_0^l \psi_j''(x)v_i(x)dx \neq 0$. Тоді розв'язок $\xi = 0$ рівняння $\dot{\xi}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\xi(t)$, $\xi(t) \in X$ є асимптотично стійким.*

1. Kalosha J., Zuyev A., Benner P. On the eigenvalue distribution for a beam with attached masses. In: Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications (G. Sklyar and A. Zuyev, eds.), Springer, 2021, 43–56.

Тривимірні усталені резонансні коливання рідини в контейнері квадратного перерізу для довільних періодичних непараметричних збурень

О. Є. Лагодзінський

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

lagodzinskyi@gmail.com

На цій конференції буде представлено результати дослідження деяких випадків резонансних хвиль на поверхні ідеальної рідини у квадратному баці, який є частково заповнений. А саме випадок, коли рідина не повністю заповнює бак, а рух є періодичним з малою амплітудою та частотою, яка в свою чергу є близькою до власної частоти коливання рідини.

При дослідженні таких рухів, задля їх аналітичного опису було використано модальну систему Наріманова-Моїсеєва [1]. Дані системи модальних рівнянь дозволять нам побудувати та проаналізувати пеоріодичні типи розв'язків системи. На цій конференції буде представлено саме асимптотичні розв'язки системи. Дослідження саме таких розв'язків системи дозволяє нам дослідити та класифікувати резонансні усталені хвилі для гармонічних зворотньо-поступальних рухів. В роботі [2] представлено класифікація усталених тривимірних резонансних хвиль, коли рух баку є довільним тривимірним непараметричним та циклічним. Після доведення асимптотичної еквівалетності відповідних періодичних розв'язків модальної системи до розв'язків, які виникають при горизонтальному поступальному еліптичному збуренню можна отримати цікавий факт. А саме, що ми можемо розглядати резонансні стаціонарні хвилі та їх збурення як функції кутового положення.

Подяка за фінансову підтримку Національному фонду досліджень України, Проєкт 2020.02/0089

1. Faltinsen O.M., Rognebakke O., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Journal of Fluid Mechanics, 2003, 487, 1–42.
2. Faltinsen O.M., Lagodzinskyi O., Timokha A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric forcing. Journal of Fluid Mechanics, 2020, 894, A10, 1–42.

Про усталені резонансні коливання рідини в баках кругового перерізу для довільних періодичних орбітальних збурень із розглядом демпфування

І. А. Райновський

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

ihor.raynovskyy@gmail.com

Ми розглядаємо ідеальну нестисливу рідину, яка частково заповнює твердий вертикальний циліндричний бак, що рухається періодично вздовж орбітальної траєкторії із частотою, близькою до власної частоти коливання рідини.

За допомогою асимптотичної модальної теорії Наріманова-Моісєєва побудовано асимптотичні періодичні розв'язки модальних рівнянь типу Наріманова-Моісєєва [1,3,4], які описують демпфовані резонансні усталені хвилі у вертикальному круговому баці, що рухається в тривимірному просторі періодично з частотою, близькою до найнижчої власної частоти. Досліджується стійкість цих хвиль. Необхідною умовою розв'язності побудованих асимптотичних періодичних розв'язків є система алгебраїчних (секулярних) рівнянь, що зв'язують чотири амплітуди домінуючих хвиль. Виведено альтернативну форму секулярних рівнянь (більш релевантну із фізичної точки зору). В рівняння Наріманова-Моісєєва включено лінійні члени, що відповідають за *демпфування*.

Альтернативна секулярна система розв'язується аналітично (чисельно). Ці розв'язки описують стаціонарні резонансні хвилі у поздовжньо-збуреному резервуарі, де враховується ефект в'язкого демпфування. Усталені хвилі класифікуються як стоячі, кругові та нерегулярні [хаотичні]. Хаотичні хвилі очікуються, коли всі теоретичні хвильові режими є нестійкими. В залежності від вхідних (фізичних та геометричних) параметрів, включаючи коефіцієнт демпфування, оцінюються діапазони частот вимушених хвильових режимів. Результати порівнюються з існуючими експериментальними даними, проведеними різними авторами. Порівняння підтверджують валідність побудованої аналітичної теорії.

Розроблено схему розв'язування цих секулярних рівнянь. Також проводиться параметричний аналіз амплітудно-частотних характеристик для визначення змін хвильових режимів та їх стійкості в залежності від частоти збурення та еліптичної орбіти [співвідношення її осей]. Головний результат полягає у підтвердженні експериментального зникнення кругової хвилі, спрямованої проти збурення (до еліптичної траєкторії), коли співвідношення осей прямує до одиниці (перехід до кругової орбіти). Останній випадок має відношення до біореакторів. Проведено порівняння з експериментальними вимірами [2].

Подяка за фінансову підтримку Національному фонду досліджень України, Проєкт 2020.02/0089

1. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Sloshing in upright circular container: Theory, analytical solutions and applications. — CRC Press/Taylor & Francis Group, 2021, 170 p.
2. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 1–8.
3. Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container. Fluid Dynamics Research, 2018, 50, 1–27.
4. Райновський І.А., Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моісєєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці. Дисертація. — Київ: Інститут математики НАН України, 2018, 161 с.

Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для псевдодвовимірних функцій

Л. О. Чернецька
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
liliia.cher.liliia@gmail.com

За допомогою методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика побудовано апроксиманти типу Паде для так званих псевдодвовимірниих функцій

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{s}_{k+m}z^k w^m=\frac{z\widetilde{f}(z)-w\widetilde{f}(w)}{z-w},$$

де

$$\widetilde{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{s}_k z^k.$$

Побудовано в явному вигляді апроксиманти типу Паде для виродженого гіпергеометричного ряду Гумберта [1]

$$f(z,w)=\Phi_2(1,1,\nu+\sigma+2,z,w)=$$

$$=\frac{z\ {}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;z)-w\ {}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;w)}{z-w},\nu,\sigma>-1.$$

Розглянуто частинний випадок для $\nu+\sigma=-1$:

$$f(z,w)=\frac{we^w-ze^z}{w-z}. \tag{1}$$

Зауважимо, що у [2] наведено чисельні приклади, повязані з обчисленням раціональних апроксимацій , що є певними двовимірними узагальненнями апроксимацій Паде, для функцій (1).

1. Голуб А. П., Чернецька Л.О. Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта. Укр. мат. журн., 2013, 65, № 10, 1315–1331.
2. Cuyt A. Pad'e Approximants for Operators: Theory and Applications. — Berlin: Springer, 1984, 144 p.

Алфавітний покажчик — Index

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

International Conference of Young Mathematicians

June 3–5, 2021

Kyiv, Ukraine

ABSTRACTS

Інститут математики НАН України

Міжнародна конференція молодих математиків

3–5 червня 2021 р.

Київ, Україна

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Ін-т математики НАН України
01024 Київ-4, вул. Терещенківська, 3